Räumlich homogene mikroskopische Größen im Rahmen der Hamilton-Jacobitheorie der Vlasovgleichung

Gottfried Stuntz

1967

Räumlich homogene mikroskopische Größen im Rahmen der Hamilton-Jacobitheorie der Vlasovgleichung

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Gottfried Stuntz
München, Oktober 1967

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Berichterstatter: Privatdozent Dr. D. Pfirsch

2. Berichterstatter: Professor Dr. A. Schlüter

Tag der mündlichen Prüfung: 20. 12. 1967

Inhaltsverzeichnis

	Einleitung	
1.	Hamilton-Jacobitheorie und Vlasovgleichung	5
1.1	Verallgemeinerte Diffusionsgleichung	6
1.2	Erhaltungssätze	12
1.3	Diffusionsgleichung der Quasilinearen Theorie	14
2.	Das kanonische Bild $S = S(v,\beta,t)$	17
2.1	Der Raum-(x,α,t)	17
2.2	Der Raum-(v,β,t)	20
2.3	Störungstheorie	23
2.4	Störungstheorie und gefangene Teilchen	28
2.5	Normierung	34
3.	Numerische Rechnungen, stabile Anfangsbedingung	36
3.1	Monochromatische Welle, erste Ordnung	38
3.1.1	Zweite Ordnung	45
3.2	Mehrere Wellen	46
3.2.1	Konstruktion von Wellenpaketen	47
3.2.2	Numerische Ergebnisse	52
4.	Numerische Rechnungen, instabile Anfangsbedingungen	60
4.1	Monochromatische Welle	60
4.2	Mehrere Wellen	63 a
	Zusammenfassung	65
	Anhang	67 - 75
	Literatur	76
	Liste der Abbildungen	77
	Abbildungen	

Einleitung

In letzter Zeit galten viele Bemühungen einer Lösung der nichtlinearen Vlasovgleichung über den Gültigkeitsbereich der linearen Näherung hinaus.

Infolge der mathematischen Äquivalenz der Vlasovgleichung mit dem dazugehörigen System der charakteristischen Differentialgleichungen - den Bewegungsgleichungen für die einzelnen Teilchen - hat man prinzipiell zunächst zwei Möglichkeiten für den Beginn geeigneter Näherungsverfahren: einerseits eine Entwicklung der dynamischen Variablen der statistischen Theorie - die Einteilchenverteilungsfunktion $f(x,v,t)$ - nach einem geeigneten Kleinheitsparameter, oder andererseits Näherungsverfahren für die entsprechenden Gleichungen für die Charakteristiken.

Beispiele für den ersten Fall sind sämtliche Versuche, die Lösung der Vlasovgleichung direkt zu entwickeln, ein Beispiel für den zweiten Fall ist die Anwendung der Hamilton-Jacobitheorie auf die Vlasovgleichung, wie sie Pfirsch in[1] darlegte.

Bei dem Versuch einer Störungstheorie der Vlasovgleichung treten allgemein zwei typische Probleme auf:

1. Die angesetzte Reihe sollte zumindest eine asymptotische Bedeutung besitzen. (Konvergenzproblem)
2. Die Größenordnung der einzelnen Terme soll im gesamten Definitionsbereich der Zeitvariablen wirklich durch den Kleinheitsparameter bestimmt werden. (Säkularitätenproblem)

Dem ersten Problem versucht man mit hinreichend kleinem

Entwicklungsparameter zu begegnen, letztlich entscheidet Brauchbarkeit und Vernünftigkeit der erhaltenen Lösung. Das zweite Problem erfordert die Entwicklung und Benutzung geeigneter säkularitätenfreier Störungstheorien.+) Beispiele sind die Methode der verschiedenen Zeitskalen von Friemann, Rutherford, Sandri u.a., oder die Erweiterung der Bogoljubov'schen Mittelwertsmethode, einem Verfahren der nichtlinearen Mechanik [2]. Charakteristisch für die genannten Verfahren ist, daß zunächst die Zahl der verfügbaren Freiheitsgrade in der Theorie erhöht wird, um dann im Sinne der Forderung nach Säkularitätenfreiheit über sie verfügen zu können.

Pfirsch bemerkt in [1], daß auch die Hamilton-Jacobitheorie der klassischen Mechanik einen möglichen Rahmen für eine säkularitätenfreie Störungstheorie liefert. In der Anwendung dieser Theorie auf die Vlasovgleichung ist interessant die Berücksichtigung der Redundanz, die eine Kenntnis der Einteilchenverteilungsfunktion in Hinsicht auf die relevanten makroskopischen Größen enthält. So wurde dieses Verfahren zunächst nur auf die Konstruktion von makroskopischen Größen angewandt, nachdem also ein Integrationsprozeß über den Geschwindigkeitsraum bereits durchgeführt ist.

In [1] wird jedoch schon angedeutet, daß die gleiche Theorie auch zur Darstellung von räumlich homogenen mikroskopischen Größen - so wollen wir die Größen nennen, die über den Geschwindigkeit-Zeit-Raum definiert sind - verwendet werden kann.

+) Ein Term in einer Entwicklung wird säkular genannt, wenn er in unphysikalischer Weise mit der unabhängigen Zeitvariablen über alle Grenzen wächst. Ein Beispiel: Der Term $\varepsilon \cdot t \cdot F^{(1)}(t)$ ist linear säkular (mit dem Säkularitätsexponenten 1).

In Hinblick einer Anwendung der Hamilton-Jacobitheorie auf den Problemkreis der Quasilinearen Theorie ist gerade dies interessant; aus der Vlasovgleichung soll zum Beispiel eine Diffusionsgleichung für den räumlich homogenen Teil der Verteilungsfunktion gewonnen werden.

In dieser Arbeit zeigen wir zunächst die Möglichkeit, im (x,α,t) - Raum der Theorie - die Bezeichnung ist mit der in [1] identisch - eine verallgemeinerte Diffusionsgleichung für den räumlich homogenen Teil der Verteilungsfunktion zu erhalten; erst nach Anwendung einer sogenannten Diffusionsnäherung (zum Beispiel eine Random-Phase Approximation) geht sie in niedrigster Ordnung in die bekannte Diffusionsgleichung der Quasilinearen Theorie über. Die Erfüllung der Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Gesamtteilchenzahl kann allgemein auch im Rahmen dieser Theorie gezeigt werden. - Ein Vorteil der Theorie liegt darin, daß für die Lösung der verallgemeinerten Diffusionsgleichung eine einfache Darstellung angegeben werden kann. Im Rahmen eines vereinfachten Anfangswertmodells zur Vlasovgleichung werden dann mit dieser Lösungsdarstellung numerische Rechnungen durchgeführt. Die Anregung einer monochromatischen Welle sowie der entgegengesetzt Fall - Anregung eines ganzen k-Spektrums - werden sowohl für stabile als auch für stark instabile Anfangsbedingungen behandelt. Es zeigt sich, daß man bereits in niedrigster Ordnung befriedigende Ergebnisse erhält, die in guter Übereinstimmung stehen zu anderen numerischen Rechnungen, welche direkt die nichtlineare Vlasovgleichung zu integrieren suchen [3]. Darüber hinaus kann hier erstmals die Anregung eines hinreichend kontinuierlichen

k-Spektrums numerisch betrachtet werden; es entstehen Ergebnisse, die den Voraussagen der Quasilinearen Theorie entsprechen.

In der diesen numerischen Rechnungen zugrunde liegenden Hamilton-Jacobitheorie werden die kanonischen Variablen (β,p,t) verwandt [1]. Die Störungstheorie wird in diesem Raum dargestellt, und es wird gezeigt, daß hier ab der zweiten Ordnung säkulare Terme möglich werden, deren Einfluß wesentlich durch die gefangenen Teilchen bestimmt ist. Damit können die bekannten Ungleichungen für die gefangenen Teilchen aus allgemeinen Bedingungen an die Störungstheorie abgeleitet und ihr Einfluß auf die numerischen Rechnungen jeweils verfolgt werden.

1. Hamilton-Jacobitheorie und Vlasovgleichung

Die Anwendung der Hamilton-Jacobitheorie auf die Vlasovgleichung bedeutet die Verwendung des Formalismus der kanonischen Transformation. Man geht davon aus, daß die Lösungsmannigfaltigkeit der Vlasovgleichung beschrieben werden kann durch sämtliche Funktionen der Konstanten derjenigen Bewegung, die durch das zugehörige charakteristische Differentialgleichungssystem dargestellt wird. Das Aufsuchen dieser Bewegungskonstanten geschieht systematisch durch Konstruktion der Erzeugenden der kanonischen Transformation, die zu den zeitlich konstanten Anfangswerten hinführt. Die erzeugende Funktion genügt dann gerade der Hamilton-Jacobi-Differentialgleichung, einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

Mathematisch vereinfacht hat man dabei das Problem noch nicht. Wieder steht eine nichtlineare Differentialgleichung erster Ordnung am Ausgangspunkt der Theorie; die Vlasovgleichung dagegen ist "nur" quasilinear, das heißt, sie ist linear in den Ableitungen der gesuchten Funktion. Pfirsch zeigte jedoch in [1], daß die Hamilton-Jacobigleichung sich gut als Basis für eine Störungstheorie eignet, die zumindest bei der Berechnung der interessierenden makroskopischen Größen sich als säkularitätenfrei erwiesen hat. So entstand zunächst ein Formalismus, der für die Berechnung von makroskopischen Größen geeignet ist. Diese werden sämtlich als Funktionale der erzeugenden Funktion dargestellt (vergleiche Anhang I).

Wir wollen jetzt diesen Formalismus anwenden auf die

Darstellung von räumlich homogenen mikroskopischen Größen und beginnen mit der Ableitung der verallgemeinerten Diffusionsgleichung für den räumlich homogenen Teil der Verteilungsfunktion.

1.1 Verallgemeinerte Diffusionsgleichung

Wir betrachten als einfachstes Modell ein eindimensionales reines Elektronenplasma mit einem räumlich homogenen Hintergrund von ruhenden positiven Ladungsträgern. Die Elektronen werden beschrieben durch die Einteilchenverteilungsfunktion f(x,v,t), die der Vlasovgleichung genügen soll.

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{e}{m}E(x,t)\frac{\partial}{\partial v}\right] f(x,v,t) = 0 \qquad (1.1)$$

E(x,t) ist das elektrische Feld, das etwa aus der Poissongleichung

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial x} = 4\pi e n_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(x,v,t) - \delta(v)\right] dv$$

selbstkonsistent zu bestimmen ist.
(e = Elementarladung, m = Elektronenmasse, n_0 = mittlere Dichte der Ionen)

Für das Folgende ist es bequem, ein System von dimensionslosen Einheiten zu definieren, wie es üblicherweise bei numerischen Rechnungen mit der Vlasovgleichung verwendet wird. Dabei werden die für das Plasma charakteristischen Längen- und Zeitskalen als maßstabbestimmende Größen benutzt.

Als charakteristische Zeitskala wird die Plasmafrequenz

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m}$$

verwandt und als charakteristische Längenskala die Debeylänge, definiert durch

$$L_D^2 = \frac{m v_{th}^2}{4\pi e^2 n_0}$$

wobei v_{th} die eindimensionale thermische Geschwindigkeit der Elektronen ist.

Dann werden Ort und Zeit jeweils als Produkt dieser maßbestimmenden Größen und den neuen dimensionslosen Einheiten dargestellt, die vorübergehend durch eine Tilde bezeichnet werden sollen:

$$t = \frac{1}{\omega_p} \cdot \tilde{t}$$

$$x = L_D \cdot \tilde{x}$$

und damit konsistent für die Geschwindigkeit

$$v = L_D \cdot \omega_p \cdot \tilde{v} = v_{th} \cdot \tilde{v}$$

Weiter erhält man konsistent damit aus der Vlasovgleichung (1.1) den Maßstabsfaktor für das elektrische Feld

$$E = \frac{m v_{th}^2}{e L_D} \cdot \tilde{E}$$

Die bekannte Dispersionsrelation zur linearen Näherung von (1.1) lautet im Grenzfall $k \to 0$, $\frac{\omega}{k} \gg v_{th}$

$$\omega^2 = \omega_p^2 \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{th}^2}{\omega_p^2} + \cdots\right)$$

und wird dann zum Beispiel in den neuen Einheiten einfach zu

$$\omega^2 = 1 + 3K^2 + \cdots \tag{1.2}$$

oder die Hamiltonfunktion

$$H(x,p,t) = \frac{p^2}{2m} + e\,\phi(x,t)$$

wird zu

$$H(x,v,t) = \frac{v^2}{2} + \phi \tag{1.3}$$

Dabei sind für die neuen dimensionslosen Größen wiederum die alten Bezeichnungen verwendet worden.

Der uns hier interessierende räumlich homogene Teil der Verteilungsfunktion geht aus der Verteilungsfunktion selbst durch eine Mittelung über den Ortsraum hervor. Bezeichnen wir den Operator der Ortsmittelung mit einer spitzen Klammer, so gilt für den Fall des unendlich ausgedehnten Plasmas:

$$f_h(v,t) := \langle f(x,v,t) \rangle_x = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{L} \int_L dx\, f(x,v,t)$$

beziehungsweise bei entsprechenden periodischen Randbedingungen (endliches Modell) einfach

$$\langle \cdots \rangle_x = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \cdots$$

mit L als Periodenlänge.

Zu (1.3) ist vielleicht zu bemerken, daß die neuen dimensionslosen Impulse in Einheiten von mv_φ zu bestimmen sind; daher kann die dimensionslose Geschwindigkeitsvariable die Rolle der Impulsvariablen übernehmen.

Im Rahmen der Hamilton-Jacobitheorie gilt für ein im ungestörten Zustand homogenes Plasma die Darstellung

$$f_h(v,t) = \langle f(\alpha(x,v,t)) \rangle_x \quad ; \tag{1.4}$$

die zunächst denkbare weitere implizite x,v,t-Abhängigkeit durch $\beta = \beta(x,v,t)$ wird durch die Forderung der Homogenität im ungestörten Zustand gerade ausgeschlossen. Hierbei bedeuten α, β die neuen kanonischen Koordinaten, die als Konstante der Bewegung zu bestimmen und in (1.4) durch die alten Koordinaten x,v wieder ausgedrückt zu denken sind.

Für die zeitliche Änderung der homogenen Verteilungsfunktion entsteht nun aus (1.4)

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle_x$$

und weiter mit

$$\frac{d\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial \alpha}{\partial t} + [H, \alpha] = 0$$

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} = -\left\langle E(x,t) \frac{\partial \alpha}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial \alpha} \right\rangle \quad . \tag{1.5}$$

Dabei war zu fordern, daß

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right\rangle_x = 0$$

gilt, was bei obigen Randbedingungen erfüllt ist.
Anstelle von (1.5) können wir aber auch schreiben

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} \left\langle E(x,t) \cdot f(\alpha(x,v,t)) \right\rangle_x \tag{1.6}$$

Ersetzt man hierin $f(\alpha(x,v,t))$ durch $\tilde{f}(x,v,t)$, $\tilde{f}(x,v,t)$

soll die Verteilungsfunktion sein, wie sie direkt in der Vlasovgleichung vorkommt , so hat man in (1.6) den bekannten, aus der Vlasovgleichung durch Anwendung des Mittelungsoperators leicht herleitbaren Ausdruck [4].

Die Gleichung (1.6) soll jetzt in Termen der erzeugenden Funktion S interpretiert werden, wobei S die Lösung der Hamilton-Jacobigleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \phi(x,t) = 0 \qquad , \qquad S = S(x,\alpha,t)$$

im Raum-(x,α,t) bedeutet. Zu diesem Zweck führen wir eine partielle Integration durch. Es entsteht

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v}\left\langle \phi(x,t)\,\frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha(x,v,t))\right\rangle_x \tag{1.7}$$

Nun ist weiter

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha(x,v,t)) = \frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial v} f(\alpha(x,v,t)) \tag{1.8}$$

und damit wird schließlich

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v}\left\langle \phi(x,t)\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial v} f(\alpha(x,v,t))\right\rangle_x \tag{1.9}$$

wobei hier und in (1.8) die Ausdrücke $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha}$ an der Stelle $\alpha = \alpha(x,v,t)$ zu nehmen sind.

Die Gleichung (1.6) nennen wir die verallgemeinerte Diffusionsgleichung für den homogenen Teil der Verteilungsfunktion, wie sie aus der Anwendung der Hamilton-Jacobitheorie auf die Vlasovgleichung folgt.

Die allgemeine Schwierigkeit bei dieser Art der Anwendung der Hamilton-Jacobitheorie besteht darin, daß für die Auswertung jetzt die Funktion $\alpha = \alpha(x,v,t)$ bekannt sein muß. Sie folgt durch Elimination von α aus der Gleichung

$$v = \frac{\partial S(x,\alpha,t)}{\partial x}$$

die im allgemeinen schwierig auszuführen ist. Diesen Eliminationsprozeß zu vermeiden, war in der Theorie der makroskopischen Größen in [1] ein wesentlicher Punkt. Bei der Konstruktion von mikroskopischen Größen in diesem Bild geht also dieser Vorteil verloren.

Es ist jedoch zu beachten, daß mit (1.4) die Lösung der verallgemeinerten Diffusionsgleichung bereits verfügbar ist und eine iterative Darstellung der Funktion $\alpha = \alpha(x,v,t)$ angegeben werden kann. Aus der Hamilton-Jacobitheorie in [1] folgt (vgl. Anhang II):

$$\alpha(x,v,t) = v - \int_0^t E(x - v(t-t'), t')\, dt' + O(E^2)$$

und (1.10)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial \alpha} = 1 - \int_0^t (t-t') \frac{\partial E}{\partial x}(x - v(t-t'), t')\, dt' + O(E^2)$$

1.2 Erhaltungssätze

Es kann leicht gezeigt werden, daß die verallgemeinerte Diffusionsgleichung in der Form (1.6) den Erhaltungssätzen für Energie, Impuls und Gesamtteilchenzahl genügt, wenn für die entsprechenden makroskopischen Größen die ihnen zugeordneten Funktionale von S benützt werden, wie sie aus der Hamilton-Jacobitheorie der Vlasovgleichung folgen. Dieser Abschnitt kann damit als Konsistenzbeweis der Theorie angesehen werden.

Zur Gewinnung des Energiesatzes gehen wir aus von der Gleichung (49) in [1].

$$\frac{\partial}{\partial t}E(x,t) = 4\pi\cdot\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\ \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \tag{1.11}$$

die sich ergibt, wenn in der Maxwellgleichung $\frac{\partial E}{\partial t} = -4\pi j$ die makroskopische Größe j(x,t) als Funktional von S ausgedrückt wird. Hierbei spielt α noch die Rolle der unabhängigen Variablen, über die einfach integriert werden kann.

Nach Multiplikation von (1.11) mit E(x,t) und Transformation des Integrals von α-Raum in den v-Raum entsteht

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{8\pi}E^2(x,t)\right) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\cdot v^2\frac{\partial}{\partial v}f(\alpha(x,v,t))\cdot E(x,t) \tag{1.12}$$

Nun interessieren wir uns nur für die über den Ort gemittelte Energiebilanz. So folgt aus (1.12)

$$\frac{d}{dt}\left\langle\frac{1}{8\pi}E^2(x,t)\right\rangle_x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\cdot v^2\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left\langle E(x,t)\cdot f(\alpha(x,v,t))\right\rangle_x \tag{1.13}$$

und mit (1.6) erhält man dann die Energiebilanz in der Form

$$\frac{d}{dt}\left[\left\langle \frac{1}{8\pi}E^2\right\rangle_x + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, v^2 f_h(v,t)\right] = 0 \tag{1.14}$$

Der dynamischen Gleichung für $f_h(v,t)$ (1.6), und damit auch unserer verallgemeinerten Diffusionsgleichung (1.9) entspricht also eine Energieänderung der Teilchen, die entgegengesetzt gleich der Energieänderung im Wellenfeld ist.

Um den Impulssatz zu verifizieren, gehen wir aus von der Gleichung

$$\frac{d}{dt}\left\langle E(x,t)\right\rangle_x = 0 \tag{1.15}$$

die sicher dann erfüllt ist, wenn auf das Plasma insgesamt keine äußeren Felder wirken. Durch einfache Umformungen folgt aus (1.15)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha}\left\langle\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2\right\rangle_x = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, f(\alpha)\left\langle \frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial \alpha}\right\rangle_x = 0 \tag{1.16}$$

wobei wieder (1.11) verwendet wurde.

Die beiden Terme in (1.16) stellen aber gerade den über Orts- und Geschwindigkeitsraum gemittelten Impuls dar, ausgedrückt als Funktional von S im Rahmen der Hamilton-Jacobitheorie [1].

Der Vollständigkeit halber führen wir noch an, daß die Erhaltung der Gesamtteilchenzahl sofort aus der Divergenz-

darstellung in (1.6) folgt.

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \cdot \frac{\partial}{\partial v} \langle E(x,t) \cdot f(\alpha(x,v,t)) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dv \cdot \frac{\partial}{\partial t} f_h(v,t) = \frac{d}{dt} N_0 \qquad (1.17)$$

wenn N_0 die Gesamtteilchenzahl ist.

1.3 Diffusionsgleichung der Quasilinearen Theorie

Es erhellt aus der Darstellung (1.9), daß eine echte Diffusionsgleichung nur durch eine zusätzliche Näherung erhalten werden kann. Diese sogenannte Diffusionsnäherung besteht in der Ersetzung

$$f(\alpha(x,v,t)) = f_h(v,t) + \varepsilon f_i(x,v,t) \qquad (1.18)$$

wobei der Parameter ε andeuten soll, daß der inhomogene Term

$$f_i(x,v,t) \equiv f(\alpha(x,v,t)) - f_h(v,t)$$

von erster Ordnung klein gegenüber dem homogenen Teil sein soll. Die Annahme der Existenz eines solchen Kleinheitsparameters ist typisch für alle sogenannten schwachen Turbulenztheorien, und die Quasilineare Theorie, mit deren Diffusionsgleichung wir jetzt unser Ergebnis vergleichen wollen, ist eine Theorie der schwachen Turbulenz.

In dieser Näherung entsteht also aus (1.9)

$$\frac{\partial f_h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} \left\langle \phi(x,t) \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} \right\rangle \frac{\partial}{\partial v} f_h \qquad (1.19)$$

eine wirkliche Diffusionsgleichung für den homogenen Teil der Verteilungsfunktion.

Betrachten wir ferner nur die niedrigste Ordnung des Diffusionskoeffizienten in (1.19), so folgt mit (1.10)

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x}\,\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha}\bigg|_{\alpha=\alpha(x,v,t)} = \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x} + O(E^2)$$

wobei mit $\alpha^{(1)}$ der erste Ordnungsterm von α bezeichnet ist. Damit erhalten wir den folgenden Ausdruck für den Diffusionskoeffizienten

$$D^{(2)} = -\left\langle \phi(x,t)\cdot \frac{\partial \alpha^{(1)}}{\partial x}\right\rangle_x = -\left\langle E(x,t)\cdot \alpha^{(1)}(x,v,t)\right\rangle_x$$

also

$$D^{(2)}(v,t) = \int_0^t dt' \left\langle E(x,t)\cdot E(x-v(t-t'),t')\right\rangle_x .$$

Dies ist aber der bekannte Diffusionskoeffizient der Quasilinearen Theorie, wie er auch kürzlich in [5] auf ganz anderem Weg abgeleitet wurde.

Versteht man die Diffusionsnäherung im angegebenen Sinn, so scheint es, daß tatsächlich nur in der niedrigsten Ordnung eine Diffusionsgleichung formuliert werden kann.

In einem erweiterten Sinn kann jedoch die Diffusionsnäherung (1.18) als eine Random-Phase Approximation interpretiert werden und als solche in jeder Ordnung des Diffusionskoeffizienten sinnvoll sein.

Tatsächlich findet man auch in der Literatur nach diesem Schema höhere Ordnungen des Diffusionskoeffizienten [6], [7]. Dabei werden noch zusätzlich entsprechende Näherungen für das makroskopische Feld benötigt, im Sinne eines Quasi-Gaußverfahrens etwa. Allgemein ist zu sagen, daß die so gewonnenen Korrekturen unwichtig sind im Vergleich zu denen, die an der dazugehörigen Dispersionsrelation angebracht werden müssen [4].

Wir wollen uns im weiteren Verlauf dieser Arbeit dann darauf konzentrieren, daß mit (1.4) eine Lösung der verallgemeinerten Diffusionsgleichung bereits verfügbar ist, wie es schon oben erwähnt wurde.

2. Das kanonische Bild $S = S(v,\beta,t)$

Wir wollen jetzt überleiten zu numerischen Rechnungen im Rahmen der Hamilton-Jacobitheorie der Vlasovgleichung für den homogenen Teil der Verteilungsfunktion. Zunächst sollen die Schwierigkeiten besprochen werden, die entstehen, wenn man die bisher verwendete Darstellung im (x,α,t)-Raum für die näherungsweisen numerischen Rechnungen beibehält. Dann wird der (β,v,t)-Raum eingeführt und die Störungstheorie in diesem Raum dargestellt.

2.1 Der Raum-(x,α,t)

Es liegt nahe, mit der Darstellungsform für die homogene Verteilungsfunktion (1.4) und der iterativen Darstellung von $\alpha = \alpha(x,v,t)$ (1.10), wie sie aus der Störungstheorie der Hamilton-Jacobigleichung im (x,α,t)-Raum folgte, numerische Rechnungen zu versuchen.

Spezialisieren wir uns hier und im folgenden auf ein periodisches, eindimensionales Plasma"volumen" der Länge L - was bei geeigneten Randbedingungen keine Einschränkung bedeutet [3] - so folgt aus (1.4) mit (1.10)

$$f_h(v,t) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx\; f\Big(v - \int_0^t dt'\, E(x - v(t-t'),t') + O(E^2)\Big) \qquad (2.1)$$

Die Funktion $E(x,t)$ denken wir uns dabei im Sinne eines vereinfachten Anfangswertmodells zur Vlasovgleichung vorgegeben und fragen nach der möglichen Rückwirkung dieses vorgegebenen Feldes auf den homogenen Teil der Verteilungs-

funktion, die ihrerseits selbst für t = 0 zum Beispiel als Maxwellverteilung vorgegeben wird.

Dieses vereinfachte Anfangswertmodell sollte zum Beispiel bei geeigneter Wahl der Phasengeschwindigkeit der Wellen - gemessen im Ruhesystem des Plasmas -

$$\frac{\omega(k_0)}{k_0} > v_{th}$$

und hinreichender Breite des Wellenspektrums im k-Raum

$$\Delta k > \frac{k_0}{\omega(k_0)} \sqrt{k_0 E} \qquad (2.2)$$

auch auf die bekannte "bump in tail" Situation der Quasilinearen Theorie angewandt werden können [8] - [11]. (k_0 bedeutet eine mittlere Wellenzahl, die die Wellengruppe charakterisiert.)

Bei dem Versuch die Gleichung (2.1) als Ausgangspunkt für die numerischen Rechnungen zu nehmen, entstand die Schwierigkeit, daß in der verwendeten Näherung für die Funktion $\alpha = \alpha(x,v,t)$ die Normierung nicht mehr aufrechterhalten werden kann. Die Normierungsforderung besagt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv\, f_h(v,t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(\alpha(x,v,t)) = \text{const.} \qquad (2.3)$$

wobei die Konstante bezüglich der Zeit gemeint ist.

Setzt man voraus, daß die Funktion $\alpha = \alpha(x,v,t)$ in der betrachteten Ordnung exakt bekannt ist, kann die Erfüllung der Normierungsforderung unter Verwendung der Erhaltung der Gesamtteilchenzahl (1.17) leicht gezeigt werden.

$$\text{const.} = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, f(\alpha(x,v,t)) = \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha\, f(\alpha)\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial\alpha} \qquad (2.4)$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx\, n(x,t) = N_0$$

N_0 bedeutet dabei zunächst die Zahl der Teilchen zu einem festen Zeitpunkt t. Aus (1.17) folgt aber dann die Gültigkeit für alle Zeiten, und N_0 kann wirklich als zeitunabhängige Normierungskonstante verwendet werden; übereinstimmend mit den dimensionslosen Einheiten gilt dann $N_0 = 1$.

Obenstehender Beweis wird jedoch hinfällig, wenn man für α nur einen Näherungsausdruck benutzt; dann wird im allgemeinen

$$\int d\alpha\cdot f(\alpha)\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial\alpha} \neq n(x,t)$$

Es soll in diesem Zusammenhang noch bemerkt werden, daß in erster Ordnung die Gleichung

$$v = \frac{\partial S(x,\alpha,t)}{\partial x}$$

exakt nach α auflösbar ist, falls - wie es später zunächst auch geschieht - für das elektrische Feld ein entsprechend einfacher Ansatz gemacht wird (monochromatische Welle).

Man kann dann von einer modifizierten ersten Ordnungsdarstellung

$$\alpha = v - \int_0^t E(x-\alpha(t-t'),t')\,dt' \qquad (2.5)$$

ausgehen und aus dieser Gleichung $\alpha = \alpha(x,v,t)$ in erster Ordnung genau bestimmen. Für die numerischen Rechnungen bringt dies jedoch keinen Vorteil. Es ergibt sich schon im einfachsten Fall bei der Auflösung von (2.5) eine Gleichung dritten Grades in α, was dann komplizierte Fallunterscheidungen nötig macht. Des weiteren würde ein nicht erweiterungsfähiger Formalismus entstehen, nicht erweiterungsfähig in Hinsicht auf höhere Ordnungen in der verwendeten Störungstheorie und für den Fall, daß statt der einen monochromatischen Welle eine ganze Wellengruppe betrachtet werden soll.

2.2 Der Raum-(v,β,t)

Bei der Konstruktion der erzeugenden Funktion S für die gesuchte kanonische Transformation kann man zwischen vier Gruppen geeigneter unabhängiger Variablen wählen, in denen diese Funktion dargestellt werden soll. Bezeichnen wieder (x,v) die alten Variablen, und (β,α) die durch die Transformation hervorgegangenen neuen Variablen, so hat man die Wahl zwischen

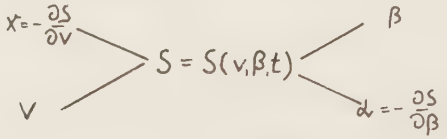
(x,α,t) (x,β,t) (v,α,t) (v,β,t)

Oft ist es bequem, S als Funktion der alten Koordinaten x und den neuen konstanten Impulsen α zu nehmen. Dies ist auch die adäquate Wahl für die Konstruktion von makroskopischen Größen, da man nach einer Integration über den Impuls α sofort die gewünschte Ort-Zeitabhängigkeit (x,t) hat.

So liegt es nahe, für die Darstellung von räumlich homogenen mikroskopischen Größen - also von (v,t) abhängigen Größen - eine Funktion S zu wählen, die neben der Zeit t von den alten Impulsen v und den neuen Koordinaten β abhängt: $S = S(v,\beta,t)$.

Nach Integration über die Variable β entsteht dann die gesuchte räumlich homogene mikroskopische Größe; in der Anwendung dann die homogene Verteilungsfunktion $f_h(v,t)$.

Die Transformation kann durch folgendes Schema angedeutet werden



und die Hamilton-Jacobigleichung lautet

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial S}{\partial v}, v, t\right) = 0 . \qquad (2.6)$$

Es ist für das folgende bequem S durch -S zu ersetzen, damit kommen wir zum verwendeten Transformationsformalismus mit der Hamilton-Jacobigleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial v}, v, t\right) = \frac{v^2}{2} + \phi\left(\frac{\partial S}{\partial v}, t\right) , \qquad (2.7)$$

wobei die zu den Bewegungsgleichungen der einzelnen Teilchen im gemittelten elektrischen Feld mit dem Potential $\Phi(x,t)$ zugehörige Hamiltonfunktion benutzt wird.

Beim Vergleich von (2.7) mit der Hamilton-Jacobigleichung im Raum-(x,α,t)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \phi(x,t) = 0$$

bemerkt man das für unser neues kanonisches Bild typische Auftreten der Funktion S im Argument des Potentials. Dies wird

dann hier im Zusammenhang mit der notwendigen Bildung der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial v}$ säkulare Terme prinzipiell möglich machen, die jedoch bei den folgenden numerischen Rechnungen sämtlich irrelevant sind. Wir können weiter unten dann zeigen, daß diese säkularen Terme wesentlich durch den Effekt der gefangenen Teilchen bestimmt sind - und in diesem Sinne als unvermeidbar betrachtet werden müssen.

Die Verteilungsfunktion f(x,v,t) wird hier dargestellt durch

$$f(\beta, \frac{\partial S}{\partial \beta}) \left| \frac{\partial^2 S}{\partial v \, \partial \beta} \right|$$

wobei

$$\left| \frac{\partial^2 S}{\partial v \, \partial \beta} \right|$$

die eindimensionale Funktional"determinante" der Transformation $\alpha \rightarrow v$ bedeutet [14].

Für ein im ungestörten Zustand homogenes Plasma verbleibt wieder nur

$$f(\frac{\partial S}{\partial \beta}) \left| \frac{\partial^2 S}{\partial v \cdot \partial \beta} \right|$$

als exakte Form der Verteilungsfunktion, und der uns hier interessierende räumlich homogene Teil dieser Verteilungsfunktion folgt durch einen Mittelungsprozeß über den β-Raum, also

$$f_h(v,t) = \left\langle f(\frac{\partial S}{\partial \beta}) \left| \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial \beta} \right| \right\rangle_\beta \qquad (2.8)$$

Durch partielle Differentiation nach der Zeit und entsprechenden

Umformungen kann man hier ebenso wie im Abschnitt 1.1 die verallgemeinerte Diffusionsgleichung ableiten

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v}\left\langle \phi\left(\frac{\partial S}{\partial v},t\right)\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial \beta_1}\cdot f'\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)\right\rangle_\beta \qquad (2.9)$$

der Strich bezeichnet Ableitung nach dem Argument der Funktion. Gleichung (2.9) ist das Pendant zur verallgemeinerten Diffusionsgleichung im (x,α,t)-Raum (1.6). Es ist daher klar, daß man ebenso wie dort aus (2.9) durch eine Diffusionsnäherung in niedrigster Ordnung den quasilinearen Diffusionskoeffizienten erhalten kann. Für die höheren Ordnungen gilt das auf Seite 15 Bemerkte.

Wir wollen uns in dieser Arbeit also darauf konzentrieren, numerische Konsequenzen aus Gleichung (2.8) zu ziehen.

2.3 Störungstheorie

Kommen wir jetzt im einzelnen zur Störungstheorie der Gleichung (2.7).

Das Plasma soll im ungestörten Zustand homogen sein, und das elektrische Potential wird als kleine Störung betrachtet.

$$|\phi| \ll \frac{v^2}{2} \qquad (2.10)$$

wobei v im Ruhesystem der elektrischen Welle mit dem Potential ϕ zu messen ist. Also, wenn P die Phasengeschwindigkeit der betrachteten Welle bedeutet $v \rightarrow \Delta v = v - P$; jetzt und im folgenden stets sind die Geschwindigkeiten wieder im Ruhesystem des Plasmas definiert.

Damit haben wir einen Kleinheitsparameter verfügbar,

$$\varepsilon = \frac{|\Phi|}{(\Delta v)^2} \ll 1$$

der nach einem Übergang zu einer räumlich ausgedehnten Ladungswolke und zu einer Mittelung über viele Teilchen dem üblichen Entwicklungsparameter der Theorie der schwachen Turbulenz entspricht,

$$\varepsilon \sim \frac{\text{Wellenenergie}}{\text{Teilchenenergie}} \ll 1 \qquad +)$$

wenn wir noch bemerken, daß die Feldfluktuationseffekte im thermischen Gleichgewicht hier stets vernachlässigbar sein sollen, das heißt, daß die ihnen zugeordnete Energie wiederum klein gegenüber den beiden bereits genannten ist [12], [13].

Auf der Grundlage dieses Kleinheitsparameters bauen wir zunächst ein allgemeines Iterationsverfahren zur Lösung der Gleichung (2.7) auf; aus dem dann der Übergang zu einer expliziten Störungsrechnung

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu S^\nu$$

erfolgen kann.

+) Wenn ε zunächst die Abweichung vom räumlich homogenen feldfreien Zustand "in der Sprache der Verteilungsfunktion" mißt (Seite 14), ist hier bei der Energiebetrachtung ε genauer durch ε^2 zu ersetzen.

In nullter Ordnung haben wir von (2.7)

$$\frac{\partial S^0}{\partial t} = \frac{v^2}{2}$$

mit der Lösung

$$S^0(v,\beta,t) = \frac{v^2}{2}t + \beta v$$

$$\alpha^0 = \frac{\partial S^0}{\partial \beta} = v$$

$$x^0 = \frac{\partial S^0}{\partial v} = vt + \beta$$

und die höheren Ordnungen von S sollen dann folgen aus

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial t} = \frac{v^2}{2} + \phi\left(\frac{\partial S^{(n-1)}}{\partial v}, t\right), \quad n \geq 1 \qquad (2.11)$$

Also für n = 1

$$S^{(1)}(v,\beta,t) = S^0(v,\beta,t) + \int_0^t dt' \phi\left(\frac{\partial S^0}{\partial v}, t'\right) \qquad (2.12)$$

wenn zu dem Zeitpunkt t = 0 die Störung eingeschaltet werden soll. Daraus folgt wieder

$$\alpha^{(1)} = \frac{\partial S^{(1)}}{\partial \beta} = v - \int_0^t dt' \cdot E\left(\frac{\partial S^0}{\partial v}, t'\right) \frac{\partial^2 S^0}{\partial \beta \partial v} \qquad (2.13)$$

$$x^{(1)} = \frac{\partial S^{(1)}}{\partial v} = vt + \beta - \int_0^t dt' \cdot E\left(\frac{\partial S^0}{\partial v}, t\right) \frac{\partial^2 S^0}{\partial v^2} \qquad (2.14)$$

Für den Ort in erster Iteration entsteht zum Beispiel folgende Darstellung aus (2.11)

$$x^{(1)} = vt + \beta - \int_0^t dt' \cdot t' \cdot E(vt'+\beta, t') \tag{2.15}$$

Zunächst könnte es den Anschein haben, daß bereits in dieser Näherung der Ort einen säkularen Term enthält, das heißt hier genauer einen t-proportionalen Schwankungsterm. Dies ist jedoch nur scheinbar: durch eine Schwankung in v wird dieser Term kompensiert. Das eingeschaltete elektrische Feld verändert auch die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen. So führt die Darstellung des Ortes nach den zwei Konstanten der Bewegung α, β mit (2.13) zu

$$x^{(1)} = \alpha t + \beta + \int_0^t dt' \cdot (t-t') \cdot E(vt'+\beta, t') \tag{2.16}$$

Dies ist völlig analog dem Ergebnis, wie man es in der Störungstheorie im (α, x, t)-Raum erhält (vgl. Anhang II). Damit ist (2.16) eine säkularitätenfreie Darstellung des Ortes bis zur ersten Ordnung.

Bei dem Übergang zur zweiten Ordnung geht die eben erwähnte Analogie verloren. Hier ergibt sich

$$\frac{\partial S^{(2)}}{\partial t} = \frac{v^2}{2} + \phi\left(vt + \beta - \int_0^t dt' \cdot t' \cdot E(vt'+\beta, t'), t\right) \tag{2.17}$$

in dem Iterationverfahren zunächst eine "implizite" Darstellung. Die Beziehung zur Störungstheorie hat man, wenn nach dem t-proportionalen Schwankungsterm

$$\int_0^t dt' \cdot t' \cdot E(vt'+\beta,t') \tag{2.18}$$

entwickelt wird. Hier erkennen wir bereits eine notwendige Bedingung an diese Störungstheorie: für Wellen mit der Wellenzahl k müssen wir fordern

$$\left| k \int_0^t dt' \cdot t' \cdot E(vt'+\beta,t') \right| \ll 1 \tag{2.19}$$

Wir kommen später nochmals auf diese Bedingung zurück und zeigen den Zusammenhang der gefangenen Teilchen mit dieser Bedingung.

Durch Entwicklung erhält man dann aus (2.17) die störungstheoretische Darstellung von S einschließlich der zweiten Ordnung.

$$S^{(2)}(v,\beta,t) = \frac{v^2}{2} t + \beta v + \tag{2.20}$$

$$+ \int_0^t \phi(vt'+\beta,t')\,dt' + \int_0^t dt' \cdot E(vt'+\beta,t') \cdot \int_0^{t'} dt'' \cdot t'' \cdot E(vt''+\beta,t'') .$$

Dieser Ausdruck kann als Ausgangspunkt für die folgenden Rechnungen verwendet werden.

2.4 Störungstheorie und gefangene Teilchen

Unter einem etwas anderen Gesichtspunkt stellen wir nochmals die Bedingungen auf, denen die Störungstheorie zu genügen hat und leiten für den Fall einer monochromatischen Welle den Zusammenhang dieser Bedingungen mit den gefangenen Teilchen her.

Die Verwendung der Näherungslösung (2.20) für S bedeutet, daß wir die geforderte kanonische Transformation ebenfalls nur näherungsweise durchführen. Bezeichnen wir mit K die durch die kanonische Transformation aus H hervorgegangene neue Hamiltonfunktion, so gilt

$$K = H - \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

falls die Hamilton-Jacobigleichung exakt gelöst werden kann.

Bei der iterativen Darstellung von S und Abbruch nach der ersten Iteration entsteht

$$K^{(1)} = H - \frac{\partial S^{(1)}}{\partial t} \neq 0$$

oder

$$K^{(1)} = \phi\left(\frac{\partial S}{\partial v}, t\right) - \phi\left(\frac{\partial S^{0}}{\partial v}, t\right) \qquad (2.21)$$

Nun schreiben wir für

$$\phi\left(\frac{\partial S^{0}}{\partial v}, t\right) = \phi\left(\frac{\partial S^{(1)}}{\partial v} - \frac{\partial S^{1}}{\partial v}, t\right)$$

wobei jetzt die einfachen Indizes ohne Klammer die jeweilige Ordnung im störungstheoretischen Verfahren bezeichnen.

Es war

$$\frac{\partial S^{(1)}}{\partial v} = x^{(1)}$$

der Ort nach der ersten Iteration und damit wird (2.21) zu

$$K^{(1)} = \phi\left(\frac{\partial S}{\partial v}, t\right) - \phi\left(x^{(0)} - \frac{\partial S}{\partial v}, t\right)$$

Diese Differenz muß nun möglichst klein sein, wenn bereits die erste Ordnung eine gute Näherung darstellen soll. Bedenkt man noch, daß in der Anwendung $\phi(x,t)$ genauer ein $\phi(\kappa x, \omega t)$ ist, so verbleibt zu fordern

$$\left|\kappa \frac{\partial S^{1}}{\partial v}\right| \ll 1 \qquad (2.22)$$

Diese Bedingung ist identisch mit der Ungleichung (2.19), wenn die störungstheoretische Darstellung für S - (2.20) - verwendet wird. Sie tritt zunächst neben die mehr intuitive Bedingung (2.10), später werden wir sehen, daß sie diese bereits mit enthält.

Zunächst fordern wir also

$$|\phi| \ll (\Delta v)^2$$

$$\left|\kappa \int_0^t dt' \cdot t' \cdot E(vt'+\beta, t')\right| \ll 1 \qquad (2.23)$$

Man erkennt, daß die zweite Forderung eine Charakterisierung der Zeitskala liefern wird, innerhalb derer die Störungstheorie sinnvoll bleibt. Die Forderung wird identisch sein damit, keine gefangenen Teilchen betrachten zu müssen.

Die gefangenen Teilchen bilden eine allgemeine Schwierigkeit bei allen Störungstheorien, die auf einer Entwicklung nach der Amplitude des elektrischen Feldes beruhen, und auch die Störungstheorie der Hamilton-Jacobigleichung fällt darunter.

Die beiden Bedingungen (2.23) sind nicht unabhängig voneinander, was auch bereits aus oben Gesagtem folgt. Denn die erste Bedingung stellt schon fest, daß die Teilchen durch das elektrische Feld in ihren Bewegungen nur schwach beeinflußt werden dürfen, und dies schließt - in einem noch vagen Sinn - den Effekt der gefangenen Teilchen bereits aus. Die Nützlichkeit der zweiten Bedingung von (2.23) wird jedoch darin bestehen, daß sie - neben der ersten Bedingung, die sie mit enthält - eine Aussage über die zulässige Wachstumsrate macht.

Im Rahmen unseres vereinfachten Anfangswertmodells betrachten wir jetzt eine gedämpfte monochromatische Welle mit der Phasengeschwindigkeit P und dem Wellenvektor k

$$E(x,t) = E^{\circ} e^{-\gamma t} \cos k(x - Pt) \qquad \gamma > 0 \qquad (2.24)$$

Damit folgt im limes $t \to \infty$ (vgl. Anhang III)

$$\left| k \frac{\partial S^{\circ}}{\partial v} \right| = \left| \frac{k E^{\circ}}{\gamma^2 + k^2 (v-P)^2} \sin(kx + \delta) \right|$$

wobei δ einen hier uninteressanten Phasenfaktor bedeutet, und es entsteht aus (2.22)

$$\left| \frac{k E^{\circ}}{\gamma^2 + k^2 (v-P)^2} \right| < 1 \qquad (2.25)$$

Das ist nun ein in zweifacher Hinsicht interessantes Ergebnis:

1. Es enthält die durch Berücksichtigung der Dämpfung modifizierte erste Bedingung von (2.23) in der Form

$$|\phi| < \frac{\gamma^2}{k^2} + (\Delta v)^2$$

2. Interpretiert man (2.25) als Bedingung an γ, so folgt für den im Sinne der Ungleichung ungünstigsten Resonanzfall $v = P$

$$\gamma^2 > kE^\circ \tag{2.26}$$

Wird γ als Maßstab einer Zeitskala benutzt, so folgt aus (2.26)

$$t < \tau_g \tag{2.27}$$

wobei

$$\tau_g^2 = \frac{(2\pi)^2}{\omega_g^2} = \frac{4\pi^2}{kE^\circ}$$

die bekannte "trapping time" ist, also die Zeit, nach der der Effekt der gefangenen Teilchen sicher nicht zu vernachlässigen ist [13], [14]. Ungleichung (2.27) sagt demnach aus, daß die betrachteten Zeiten so klein sein müssen, daß der Trappingeffekt nicht wesentlich ist.

Anknüpfend an die Bemerkung zu (2.18) haben wir damit den Tatbestand, daß die in der Störungstheorie im (v,β,t)-Raum ab der zweiten Ordnung möglich werdenden säkularen Terme

wesentlich erst durch die gefangenen Teilchen werden. Sie sind in dieser Beziehung unvermeidbar, und es ist als ein Vorteil der Störungstheorie im Raum-(v,β,t) anzusehen, daß dieser Zusammenhang im Fall einer monochromatischen Welle so explizit sichtbar wird.

Ein schwach turbulentes Plasma wird nachher in unserem vereinfachten Anfangswertmodell durch die Anregung eines wellenpakets charakterisiert. Dies bedeutet wegen des dann kleineren Effektes der gefangenen Teilchen eine günstigere Voraussetzung für die Erfüllung der für die Störungstheorie wichtigen Bedingung

$$\left| k \frac{\partial S^1}{\partial v} \right| \ll 1$$

Das Wellenpaket sei durch seine mittlere Wellenzahl k_0 und seine Halbwertsbreite Δk gekennzeichnet. Es besteht die Maßgabe

$$\Delta k < k_0 \qquad (2.28)$$

ansonsten würde das Paket seine Breite sehr rasch verändern. Dies ist wegen (1.2) konsistent mit der Bedingung

$$\Delta v < v_p$$

das heißt einen kleinen "bump" im Schwanz der Verteilungsfunktion. (Hierbei ist $v_p = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$ die im Ruhesystem des Plasmas gemessene mittlere Phasengeschwindigkeit des Paketes.)

Mit der Halbwertsbreite kommt dann ein neuer Parameter in unser vereinfachtes Anfangswertmodell, über den im Sinne eines möglichst kleinen Effektes der gefangenen Teilchen verfügt werden soll. Die physikalisch zu fordernde Situation ist die folgende: die Zeit τ_D,

die ein Teilchen benötigt, um das Wellenpaket mit der Halbwertsbreite Δk zu passieren, muß klein sein gegenüber der für Teilcheneinfang charakteristischen Zeit τ_g . Also

$$\frac{K_0}{\Delta K} < \frac{2\pi}{\sqrt{k_0 E^0}} \tag{2.29}$$

Genauer müßte bei der Durchgangszeit τ_D die Differenz zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit benutzt werden. Dies ergibt jedoch wegen der verwendeten linearen Dispersionsrelation (1.2) nur eine für das Folgende unwesentliche Vergrößerung der Durchgangszeit und damit einen etwas größeren Effekt durch die gefangenen Teilchen als der durch (2.29) angegebene.

Als Gütefaktor gleichsam für die dann folgenden numerischen Rechnungen können wir den Quotienten der beiden charakteristischen Zeiten verwenden.

$$g := \frac{\tau_D}{\tau_g} = \frac{1}{2\pi} \frac{K_0}{\Delta K} \sqrt{k_0 E^0} \tag{2.30}$$

und wir haben dann wegen (2.29)

$$g < 1$$

zu verlangen, was mit der einen Bedingung für die Gültigkeit der Quasilinearen Theorie (2.2) zusammenfällt.

Vergleichen wir die Ungleichung (2.29) in der Form

$$\sqrt{k_0 E^0} < \frac{\Delta K}{K_0}$$

mit unserer früheren Bedingung

$$\sqrt{k.E^{\circ}} < \gamma$$

so folgt die Entsprechung

$$\frac{\Delta k}{k_o} \sim \gamma \qquad (2.31)$$

Hieraus sehen wir nochmals deutlich, daß ein größeres Δk - was einem im Ortsraum eng begrenzten Wellenpaket entspricht - den Effekt der gefangenen Teilchen herunterdrückt. Es hat die gleiche Wirkung wie ein größeres γ oder - in der Sprache der Zeitskalen - wie eine Verkleinerung der Zeitskala, in der die Änderung des homogenen Teils der Verteilungsfunktion betrachtet wird.

2.5 Normierung

Eine Schwierigkeit bei der Verwendung von (1.1) für numerische Rechnungen lag in der Nichterfüllung der Normierungsforderung, was mit der im allgemeinen nur näherungsweise möglichen Darstellung der Funktion $\alpha = \alpha(x,v,t)$ zusammenhing.

Wir zeigen, daß hier das explizite Auftreten der Funktionaldeterminante in (2.8) automatisch die Normierung in jeder Ordnung der Störungstheorie sichert.

Das Normierungsintegral führt jetzt mit (2.8) zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_h(v,t)\,dv = \frac{1}{L}\int_0^L d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, f\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial v \partial \beta} = \frac{1}{L}\int_0^L d\beta \int_{-\infty}^{+\infty} d\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right) f\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right) \qquad (2.32)$$

denn zu jedem festen Zeitpunkt ist in dem inneren Integral S eine Funktion von v allein. Wie oben schon erwähnt genügt es, die Erfüllung der Normierung nur zu einem bestimmten Zeitpunkt zu prüfen; aus dem Erhaltungssatz für die Gesamtteilchenzahl folgt dann die Gültigkeit für alle Zeiten.

Das innere Integral nach dem zweiten Gleichheitszeichen in (2.32) ist nun aber einfach die Normierungsforderung an die ursprüngliche Verteilungsfunktion, die natürlich erfüllt sein muß. Also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_h(v,t)\,dv = \int_0^L \frac{d\beta}{L}\, n(\beta,t) = 1$$

3. Numerische Rechnungen, stabile Anfangsbedingung

Jetzt kommen wir dazu, im Rahmen des bereits geschilderten vereinfachten Anfangswertmodells die Gleichung (2.8) für den räumlich homogenen Teil der Verteilungsfunktion numerisch zu integrieren. Die Grundlage der numerischen Rechnungen ist die in Abschnitt 2.3 dargelegte Störungstheorie im (v,β,t)-Raum; zunächst beschränken wir uns auf die Darstellung in der ersten Ordnung.

Die Konstruktion der homogenen Verteilungsfunktion nach (2.8) ist ein einfaches Integrationsproblem. Vom numerischen Gesichtspunkt aus betrachtet, ist die Integration ein stabiles Verfahren. Eine numerische Integration ist stets zuverlässiger als eine numerische Differentiation. In der einfachen Struktur unserer Ausgangsgleichung liegt damit ein Vorteil gegenüber anderen numerischen Rechnungen, die von der nichtlinearen Vlasovgleichung direkt ausgehen [3], [15], [16]. Natürlich ist bei diesem Vergleich zu bedenken, daß unsere Fragestellung eine spezielle ist, und daß wir im Gegensatz zu [3], [15], [16] mit einem im strengen Sinn nicht selbstkonsisten Anfangswertmodell arbeiten. Denn wir betrachten das elektrische Feld als eine fest vorgegebene Funktion, die nicht im nächsten Zeitintervall bereits durch die sich ändernde Verteilungsfunktion modifiziert wird. Ferner müssen wir in diesem Zusammenhang nochmals auf die Bedingung unserer Störungstheorie (2.19) hinweisen, die die gefangenen Teilchen gerade ausschließt - wieder im Gegensatz zu den eben zitierten numerischen Rechnungen.

Diese Unterschiede sind zu beachten, wenn wir dann unsere Ergebnisse mit denen in [3] vergleichen, die auf ganz anderem Wege erhalten wurden. Armstrong integriert das volle, selbstkonsistente System der nichtlinearen Vlasovgleichung und der Poissongleichung, indem die Fourierkomponente der Verteilungsfunktion im wesentlichen nach Hermite'schen Polynomen $H_n(v)$ - mit n bis 1000 - entwickelt wird [15]. Das numerische Verfahren setzt dann ein bei der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten, für die ein gewöhnliches, nichtlineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem gilt, im Gegensatz zum gekoppelten partiellen Integro-Differentialgleichungssystem der Ausgangsgleichungen. Dann wird unter anderem auch der homogene Teil der Verteilungsfunktion betrachtet, indem in der allgemeinen Reihendarstellung der Verteilungsfunktion über die für den homogenen Fall allein signifikanten Terme summiert wird.

Es ist klar, daß diese speziellen Ergebnisse dann teilweise auch die generellen Schwierigkeiten zeigen, die eine direkte numerische Behandlung der Vlasovgleichung besitzt: linear säkulare Terme in der Geschwindigkeitsableitung von $f(x,v,t)$ erzeugen eine mit wachsender Zeit immer kompliziertere Mikrostruktur der Verteilungsfunktion. Dies erschwert eine genaue numerische Darstellung für große Zeiten, und die benutzten numerischen Verfahren können instabil werden [17], [15].

Bei unseren numerischen Rechnungen, die also auf der Gleichung

$$f_h(v,t) = \left\langle f\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right) \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial \beta} \right\rangle_\beta$$

beruhen, wurde das den Mittelungsprozess darstellende Integral

jeweils nach der Simpsonformel ausgerechnet, die eine ausreichende Genauigkeit bot. Die Rechnungen wurden auf der elektronischen Rechenmaschine des Instituts - der sogenannten G 3 - ausgeführt. Des weiteren wurde ein an die Maschine gekoppeltes elektronisches Analogsichtgerät zur Darstellung der homogenen Verteilungsfunktion verwandt.

3.1 Monochromatische Welle, erster Ordnung

In erster Ordnung der Störungstheorie für die erzeugende Funktion S lautet die aus (2.8) folgende Integrationsaufgabe

$$f_h(v,t) = \frac{1}{L}\int_0^L d\beta \cdot f\left(v - \int_0^t dt' E(vt'+\beta,t')\right)\cdot\left\{1 - \int_0^t dt'\, t' \frac{\partial}{\partial\beta} E(vt'+\beta,t')\right\} \tag{3.1}$$

In unserem vereinfachten Anfangswertmodell wird jetzt das elektrische Feld im Plasma in der Form einer gedämpften monochromatischen Welle

$$E(x,t) = E^0 \cdot e^{-\gamma t}\cdot e^{i(\kappa x - \omega(\kappa)t)} \tag{3.2}$$

vorgegeben[+)], und wir interessieren uns für die asymptotische Form der homogenen Verteilungsfunktion. Zum Zeitpunkt t = 0 soll das Plasma durch die homogene Maxwellverteilung

$$f(v,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} \tag{3.3}$$

charakterisiert sein, sich also in einem stabilen Zustand befinden.

+) wenn hier und im folgenden komplexe Größen erscheinen, ist stets nur der Realteil davon als physikalische Größe gemeint.

Mit (3.2) entsteht dann aus (3.1) im limes $t \to \infty$ (vgl. Anhang III).

$$f_h(v, t=\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \, f\left(v - E^{\circ} \frac{\gamma \cos x - K(v-P)\sin x}{\gamma^2 + K^2(v-P)^2}\right) \left\{ 1 + \right. \tag{3.4}$$

$$\left. + \frac{E^{\circ} K}{\left[\gamma^2 + K^2(v-P)^2\right]^2} \left(2K(v-P)\gamma \cos x + \left(\gamma^2 - K^2(v-P)^2\right) \sin x \right) \right\}.$$

Hier ist P wieder die Phasengeschwindigkeit der Welle, die über die lineare Dispersionsrelation (1.2) mit der Wellenzahl k zusammenhängen soll. Parameter sind die Amplitude E , die Wellenzahl k und die Dämpfungskonstante γ .

Zunächst stellen wir die Transformationen fest, bei denen das Integral (3.4) - der homogene Teil der Verteilungsfunktion also - invariant bleibt. Es sind dies

$$K \longrightarrow -K$$

$$E \longrightarrow -E \tag{3.5}$$

wie man leicht durch die Substitutionen $x \to -x$, beziehungsweise $x \to x + \pi$ sehen kann. Die zweite Invarianz von (3.5) sichert insbesondere die Unabhängigkeit des Effektes vom Vorzeichen des elektrischen Feldes.

Aus (3.5) folgt weiter die Invarianz des Integrals bei der Transformation

$$\gamma \longrightarrow -\gamma \tag{3.6}$$

Dies besagt, daß das vereinfachte Anfangswertmodell invariant gegenüber Zeitumkehr ist: ob wir von $t = 0$ bis $t = t$ eine gedämpfte Welle im Plasma verfolgen, oder von $t = -t$ bis $t = 0$

eine anwachsende Welle, ist für den betrachtenden Effekt gleich.

Die Eigenschaft der Reversiblität des vereinfachten Anfangswertmodells ist in dem entsprechenden Verhalten der Vlasovgleichung begründet, die ohne Stoßglied ebenfalls invariant bei Spiegelung der Zeitkoordinate ist, genauso wie zum Beispiel die entsprechende Liouvillegleichung für die N-Teilchenverteilungsfunktion. In der gleichen Weise besitzt die verallgemeinerte Diffusionsgleichung zunächst diese formale Invarianzeigenschaft und damit auch der homogene Teil der Verteilungsfunktion, den wir hier betrachten. Erst eine zusätzliche statistische Annahme - z. B. Phasenmittelung - läßt daraus eine echte Diffusionsgleichung entstehen, die einen irreversiblen Diffusionsprozeß im Geschwindigkeitsraum beschreibt.

Gleichung (3.4) bildet den Ausgangspunkt für die numerische Integration. Zur Diskussion ist es jedoch zweckmäßiger, den Ausdruck in der geschweiften Klammer nochmals umzuformen. Es entsteht damit als Funktionaldeterminante bei der Integration

$$Det(x,v) := 1 + \frac{E^{\circ} \cdot K}{\gamma^2 + K^2 (v-P)^2} \sin(x+\delta) \qquad (3.7)$$

mit

$$\tan\delta = \frac{2\gamma K (v-P)}{\gamma^2 - K^2 (v-P)^2}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der allgemeinen Bedingung (2.25), die wir an die Störungstheorie zu stellen haben, so folgt: falls (2.25) erfüllt ist, bleibt die Funktionaldeterminante

Det(x,v) im gesamten Integrationsintervall positiv. Also

$$Det(x,v) > 0 \quad \text{falls} \quad \frac{E^{\circ}K}{\gamma^2 + K^2(v-P)^2} < 1 \tag{3.8}$$

Damit wird das Verhalten der Funktionaldeterminante entscheidend durch die gefangenen Teilchen beeinflußt. Im Fall einer monochromatischen Welle kann in der ersten Ordnung der Störungstheorie ein eindeutiger Zusammenhang hergestellt werden zwischen dem Signum von Det(x,v) und dem Effekt der gefangenen Teilchen, indem man bemerkt, daß für

$$\gamma \leq \sqrt{K \cdot E^{\circ}} \tag{3.9}$$

an der Resonanzstelle $v = P$ $Det(x,P)$ für bestimmte Werte von x den Wert 0 erreicht, beziehungsweise das Vorzeichen dann wechselt.

Als Bedingung an die Zeitskala heißt dies aber

$$t \geq \tau_g \tag{3.10}$$

wobei τ_g wieder die Zeit ist, nach der der Effekt der gefangenen Teilchen sicher wichtig wird. Demnach haben wir die Entsprechung

$$Det(x,v) \begin{cases} > 0 & \text{gefangene Teilchen sind vernachlässigbar} \\ < 0 & \text{das Gegenteil gilt} \end{cases} \tag{3.11}$$

Nun folgt aus physikalischen Gründen sofort, daß es im Fall einer monochromatischen Welle stets Teilchen gibt, die sich

gerade mit der Phasengeschwindigkeit der Welle bewegen, von ihr also eingefangen werden können. Einen vernachlässigbar kleinen Trapping-Effekt kann es dann allein durch sehr kleine Feldamplituden oder sehr große Dämpfung geben.

Zu Illustration geben wir zwei numerische Beispiele

1. Bei einer Wahl von $k = 0.5$, $\gamma = 0.15$ folgt, daß für $E = 0.04$ stets

$$\gamma > \sqrt{kE^{\circ}}$$

ist. Dies entspricht bei Armstrong [3] dem Fall II.

Unsere hier erhaltene Kurve für den räumlich homogenen Teil der Verteilungsfunktion, die in Abb. 1 dargestellt ist, entspricht gut seiner Kurve der Abb. 8b. Allgemein gilt in diesem Fall, daß sich $f(v,t)$ nur wenig von seinem Anfangswert $f(v,t=0)$ unterscheidet, und dieses Unterscheidungsgebiet liegt in der Nähe der Resonanzgeschwindigkeit $P = \frac{\omega}{k}$. Dies steht auch in guter Übereinstimmung mit [18], [19], wo eine quasilineare Theorie monochromatischer Wellen entwickelt ist.

Offenbar setzen dann in den numerischen Rechnungen bei Armstrong für größere Zeiten numerische Instabilitäten ein, die den sogenannten "rippling in velocity space" zur Folge haben und mit den oben erwähnten Schwierigkeiten der numerischen Integration der Vlasovgleichung zusammenhängen. Bei der Behandlung in unserem Anfangswertmodell wäre dann die Bedingung (2.27) zu stark verletzt und deshalb die gefangenen Teilchen nicht mehr vernachlässigbar. - Gilt jedoch (2.27), so ist es hier zulässig, die obere Grenze der Integration in (3.1) durch ∞ zu ersetzen.

2. Bei $k = 0.5$ und $E = 0.1$ wird durch $\gamma > \sqrt{kE^0}$ ein $\gamma = 0.22$ gefordert. Die Kurve zeigt einen qualitativ gleichen Verlauf wie die im Beispiel 1 erhaltene. Das Unterscheidungsgebiet hat sich leicht vergrößert - vgl. Abb. 1a - .

Bei einer Vergrößerung der Amplitude müßte also die Dämpfung entsprechend vergrößert werden, um den Effekt der gefangenen Teilchen noch zu unterdrücken. Die Rückwirkung des vorgegebenen Feldes auf die Verteilungsfunktion ist dann qualitativ die gleiche.

Geht man bei einem festen Wert γ zu größeren Amplituden über, so entsteht im Geschwindigkeitsraum ein Bereich, in welchem bei der Integration über x die Funktionaldeterminante durch den nicht mehr vernachlässigbar kleinen Trapping-Effekt einen Vorzeichenwechsel erleidet. Um genauer den Einfluß der gefangenen Teilchen in diesem Bereich angeben zu können, wurden vergleichsweise in einem zweiten Integrationsprogramm jeweils diese Punkte ausgelassen und das Verhältnis des so ausgesparten Integrationsbereiches zum Gesamtintervall anzugeben. Dieses Verhältnis gibt im Detail Auskunft über den Einfluß der gefangenen Teilchen; Parameter ist die Geschwindigkeitsvariable v.

So hat man zum Beispiel für $k = 0.5$, $E = 0.1$ und $\gamma = 0.15$ den Einflußbereich der gefangenen Teilchen von $v = 2.5$ bis $v = 3.0$ mit folgenden Prozentzahlen:

v	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
%	35	50	35	35	35	20

und für $E = 0.25$ - mit sonst gleichen Werten - den Einflußbereich von $v = 2.2$ bis $v = 3.3$ mit

v	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3
%	35	45	55	55	60	50	45	45	40	40	30	30

Man erkennt, daß der maximale Einfluß der gefangenen Teilchen bei und in der Nähe der Resonanzgeschwindigkeit liegt. Diese hat für $k = 0.5$ den Wert $P = 2.75$, wie es aus (1.2) folgt:

$$P = \frac{1}{k} + \frac{3}{2}k$$

Natürlich wären die in diesem Bereich gezeichneten Kurven für die homogene Verteilungsfunktion nur sehr angenähert richtig, denn mit solchem Negativwerden der Funktionaldeterminante wird unsere Bedingung für die Gültigkeit der Störungstheorie grob verletzt. Aus diesem Grund beschränken wir uns darauf zu bemerken, daß mit wachsender Amplitude und kleiner werdendem γ sich die Kurve immer stärker ausbeult, etwa symmetrisch zur Resonanzgeschwindigkeit P.

Bereits bei den letztzitierten Werten erhält man aus (3.4) eine negative homogene Verteilungsfunktion, was die dann eingetretene Unzulässigkeit der verwendeten Näherung noch einmal beleuchtet.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß im Fall einer monochromatischen Welle die nach Gleichung (3.4) berechnete homogene Verteilungsfunktion für

$$\gamma > \sqrt{kE^\circ}$$

keine wesentlichen nichtlinearen Effekte zeigt. Man erhält also insbesondere kein diffusionsähnliches Verhalten: die Voraussetzung einer Diffusionsnäherung ist nicht erfüllt und die Theorie liefert deshalb auch keine echte Diffusionsgleichung für $f_h(v,t)$

Dies steht in guter Übereinstimmung sowohl zu den numerischen Rechnungen in [3], als auch zu der allgemeinen Theorie in [18], [19].

3.1.1 Zweite Näherung

Um die Konvergenz der in Abschnitt 2.3 erläuterten Störungsrechnung numerisch zu prüfen, wurde der Integrand von (2.8) auch in der zweiten Ordnung berechnet. Für die gegebene monochromatische Welle waren die geforderten Integrationen ähnlich leicht durchzuführen wie in der ersten Ordnung (vgl. Anhang III). Es folgt für die Darstellung von $f_h(v,t)$ bis einschließlich zweiter Ordnung wieder im limes $t \to \infty$

$$f_h(v,t=\infty) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx \cdot f\Big(v - E^\circ \frac{\gamma\cos x - k(v-P)\sin x}{\gamma^2 + k^2(v-P)^2} - \tag{3.12}$$

$$- \frac{E^{\circ 2}}{4} k \frac{[3\gamma^2 k(v-P) - k^3(v-P)^3]\cos 2x + [\gamma^3 - 3\gamma k^2(v-P)^2]\sin 2x}{[\gamma^2 + k^2(v-P)^2]^3}\Big) \cdot \{Det^{(2)}(x,v)\}$$

Hierbei geht der analytische Ausdruck für $Det^{(2)}(x,v)$ durch Ableitung nach der Geschwindigkeit vom Argument der Funktion f hervor. Wegen der "Länglichkeit" wird auf eine Wiedergabe verzichtet. Durch die kompliziertere Struktur von $Det^{(2)}(x,v)$ - gegenüber Det (x,v) der ersten Ordnung - ist es auch nicht möglich, eine ähnlich einfache Umformung durchzuführen, die den Zusammenhang der Funktionaldeterminante mit den gefangenen Teilchen deutlich werden läßt.

Es war zu erwarten - Erfüllung der Bedingung (2.25) an die Störungstheorie vorausgesetzt - daß die Korrekturen durch die Mitnahme der zweiten Ordnungsterme vernachlässigbar klein sind. Dies wurde durch entsprechende Rechnungen mit (3.12) geprüft und verifiziert. Die Abweichungen zur ersten Ordnungsrechnung des letzten Abschnitts lagen dabei sämtlich unter der Zeichengenauigkeit. In diesem Sinn ist also das angegebene Störungsverfahren stabil.

Für den Fall, daß (2.25) nicht erfüllt ist, gibt es natürlich Abweichungen: das Störungsverfahren wird instabil durch den nicht mehr vernachlässigbaren Effekt der gefangenen Teilchen.

3.2 Mehrere Wellen

Um die Anwendbarkeit unserer Darstellung für die homogene Verteilungsfunktion zu erweitern, müssen wir nach Möglichkeiten suchen, über die sehr einschränkende Bedingung (2.25) hinaus den Effekt der gefangenen Teilchen zu verkleinern. Es bietet sich sofort die Verallgemeinerung an, anstelle der einen

monochromatischen Welle die Anregung einer ganzen Wellengruppe zu betrachten. Die Berechnungen sind in diesem Fall auch auf der Grundlage von Gleichung (2.8) zu führen. Daß dies ohne zusätzliche Komplikationen möglich ist, ist ein weiterer Vorteil unseres vereinfachten Anfangswertmodells im Rahmen der Hamilton-Jacobitheorie zur Vlasovgleichung.

Bisher ist es nicht gelungen, auf der Basis der direkten numerischen Lösung der nichtlinearen Vlasovgleichung ein hinreichend kontinuierliches k-Spektrum zu betrachten und Ergebnisse für die räumlich gemittelte Verteilungsfunktion zu erhalten, die den Voraussagen der Quasilinearen Theorie entsprechen.

Dies gelingt jetzt mit Gleichung (2.8), und die bisher geschilderten Vergleiche mit anderen Theorien für den Fall einer monochromatischen Welle rechtfertigen es, ein gewisses Vertrauen in das vereinfachte Anfangswertmodell zu haben.

3.3.1 Konstruktion von Wellenpaketen

Beginnen wir mit der analytischen Darstellung eines Wellenpaketes in der Form

$$E(x,t) = E^{\circ} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \cdot \varphi(k-k_{\circ}) \cdot e^{i(kx-\omega(k)t)} \qquad (3.13)$$

Dabei bezeichnet $\varphi(k - k_{\circ})$ die um den Punkt $k_{\circ}$ im k-Raum symmetrische, im quadratischen Sinn normierte Spektralfunktion,

etwa von der Form einer Gaußverteilung mit der Halbwertsbreite Δk.

$$\varphi(k-k_0) = \mathcal{C} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(k-k_0)^2}{(\Delta k)^2}} \qquad (3.14)$$

Δk ist also genauer diejenige Breite, wo φ auf den $e^{-\frac{1}{2}}$-fachen Wert abgesunken ist ($e^{-\frac{1}{2}} \sim 0.6$). $\mathcal{C}$ ist ein hier unwichtiger Normierungsfaktor. Im Ortsraum hat dann das Wellenpaket näherungsweise ($\Delta k \ll k_0$) ebenfalls eine zu (3.14) analoge Form.

$$E(x,t) = \tilde{\mathcal{C}} \cdot E^0 \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - v_{gr} t}{\Delta x}\right)^2} \cdot e^{ik(x-Pt)} \qquad (3.15)$$

$$\Delta k \, \Delta x = 1$$

mit

$$v_{gr} = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} \qquad P = \frac{\omega_0}{k_0} \qquad \tilde{\mathcal{C}} = \frac{\mathcal{C}}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

Genauer wird die Halbwertsbreite im Ortsraum zeitabhängig. Diese Verbreiterung ist

$$\left| (\Delta x(t))^2 - (\Delta x(t=0))^2 \right| \sim \left(\frac{d^2\omega}{dk^2}\right)_{k_0} \cdot t$$

und damit zur ersten Ableitung der Gruppengeschwindigkeit proportional.

Würde man anstelle von (3.14)

$$\varphi(k-k_0) = \frac{1}{\sqrt{Z}} \sum_{\nu=1}^{Z} \delta(k-k_\nu) \qquad (3.16)$$

wählen - wenn wir einmal von der singulären Normierung absehen - so bedeutet der Ansatz (3.13) die Überlagerung von Z-monochro-

matischen Teilwellen mit gleicher Amplitude. Ein "gutes", dies soll heißen im Ortsraum befriedigend lokalisiertes Wellenpaket erhält man jedoch erst, wenn tatsächlich die einzelnen Amplituden nach Maßgabe der Gaußfunktion (3.14) zum Integral (3.13) beitragen.

Den Effekt der gefangenen Teilchen ganz ausschließen würde eine Spektralfunktion der Form

$$\varphi(k) \sim e^{ikx_0}$$

Dann hat man ein im gesamten k-Raum angeregtes Wellenspektrum, dem zur Zeit $t = 0$ im Ortsraum eine Deltafunktion an der Stelle $x = x_0$ entspricht. Dies ist aber in unserem physikalischen Zusammenhang nicht sinnvoll: denkt man an die "bump in tail" Situation der Quasilinearen Theorie, so ist eine Streubreite der Phasengeschwindigkeit der betrachteten angeregten Wellen vorgegeben. Dies entspricht nach (1.2) eindeutig einem Δk im k-Raum,

$$\Delta k \sim \frac{k}{v_p} \cdot \Delta v$$

bei dem die Wellen nur angeregt sein sollen. Und damit haben wir nach (2.30) auch einen gewissen Prozentsatz an gefangenen Teilchen. Weiter unten werden wir sehen, daß für $g \sim 10\,\%$ gut die quasilineare Plateau-Vorhersage numerisch verifiziert werden konnte.

Nach dem oben Gesagten wäre die einfachste numerische Darstellung eines Wellenpaketes die Überlagerung von Z harmonischen

Teilwellen an den Stellen k_ν im k-Raum, jeweils mit

$$B_\nu := C \cdot e^{-\frac{4}{3}\left(\frac{K_\nu - K_0}{\Delta K}\right)^2} \qquad \nu = 1 \cdots Z \qquad (3.17)$$

gewichteten Amplituden.

Dieses einfache Verfahren jedoch hätte Nachteile: bei gegebener Halbwertsbreite Δk und unterschiedlicher Zahl der Wellen würde - äquidistante Abstände zwischen den einzelnen Wellen im k-Raum vorausgesetzt - jeweils ein unterschiedlicher Bereich der Spektralfunktion ausgenutzt. Dasselbe gilt für den umgekehrten Fall. Wir suchen jedoch die gleiche Beschreibung für alle Wellenpakete, das heißt es soll der spektrale Bereich vorgegeben werden - etwa von der Stelle k_0 aus je drei Halbwertsbreiten in beide Richtungen - und der Abstand zwischen den Wellen bestimmt sich aus dieser Forderung; natürlich auch aus der Vorgabe der Zahl der Wellen. Ferner ist dazu noch die Nebenbedingung zu beachten,

$$\frac{K_\nu}{K_Z} = \text{rationale Zahl} \qquad \nu = 1 \cdots Z$$

was für die Existenz eines gemeinsamen Periodizitätsintervalls bei Z harmonischen Wellen eine hinreichende Bedingung ist.

Eine weitere Verbesserung lag darin, daß unter der Verwendung einer Bibliotheksroutine für die Fehlerfunktion

$$\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx$$

$$-1 \leq \phi(x) \leq +1 \qquad +)$$

+) Eine Verwechslung mit dem elektrischen Potential scheint in diesem Zusammenhang ausgeschlossen.

anstelle von normierten Stützstellen (3.17) normierte Gewichtsflächen verwendet wurden, definiert zum Beispiel für den Punkt k_o durch

$$B_o = C \cdot \left\{ \Phi\left(\frac{DK}{2\sqrt{2}\,\Delta K}\right) - \Phi\left(\frac{-DK}{2\sqrt{2}\,\Delta K}\right) \right\} \qquad (3.18)$$

wobei der Faktor C wieder die geforderte quadratische Normierung sichern soll und DK den Abstand der einzelnen Wellen im k-Raum mißt.

So wird schließlich numerisch das Wellenpaket (3.13) dargestellt durch

$$E(x,t) = E^o \sum_{\nu=1}^{Z} B_\nu \cdot e^{i(k_\nu x - \omega(k_\nu) t)} \qquad (3.19)$$

$$\sum_{\nu=1}^{Z} B_\nu^2 = 1$$

wobei die B_ν analog zu (3.18) bestimmt werden, und

$$k_\nu = k_o - 3\Delta K + \nu \cdot \frac{6 \cdot \Delta K}{Z} \qquad \nu = 0 \cdots Z$$

Die durch (3.19) beschriebenen Wellenpakete wurden auf dem Bildschirm des Analogsichtgerätes sichtbar gemacht und zeigten bereits ab Z = 7 einen guten "paketähnlichen" Verlauf.

In den Abbildungen der homogenen Verteilungsfunktion sind die den k_ν im Geschwindigkeitsraum nach (1.2) entsprechenden P_ν und die normierten Gewichtsfaktoren der einzelnen Wellen B_ν durch ein "+" markiert, indem "+" $\sim (P_\nu, B_\nu)$ gilt (im Sinne

eines zweidimensionalen Vektors). Ferner bedeuten auf den Abbildungen die Buchstaben Z, k_o, E , G, HB in dieser Reihenfolge: Zahl der Wellen, mittlere Wellenzahl k_o, mittlere Amplitude E°, Dämpfung γ , Halbwertsbreite Δk . Die Bemerkung "Mit gefangenen Teilchen" bezieht sich auf eine Integration über das gesamte Periodizitätsintervall, zum Unterschied der Vergleichsroutinen, wo die negativen Gebiete der Funktionaldeterminante gerade ausgeschlossen wurden.

3.2.2 Numerische Ergebnisse

Die Verallgemeinerung der Formel (2.8) auf den Fall mehrerer Wellen ist einfach. Es entsteht in der ersten Ordnung mit (3.19)

$$f_h(v,t=\infty) = \frac{1}{L}\int_0^L dx\, f\Big(v - E^\circ \sum_{\nu=1}^{Z} B_\nu \frac{\gamma\cdot\cos\frac{k_\nu}{k_2}x - k_\nu(v-P_\nu)\cdot\sin\frac{k_\nu}{k_2}x}{\gamma^2 + k_\nu^2(v-P_\nu)^2}\Big)\Big\{1 + \tag{3.20}$$

$$+ E^\circ \sum_{\nu=1}^{Z} \frac{B_\nu\cdot k_\nu}{[\gamma^2 + k_\nu^2(v-P_\nu)^2]^2}\left(2k_\nu(v-P_\nu)\cdot\gamma\cdot\cos\frac{k_\nu}{k_2}x + [\gamma^2 - k_\nu(v-P_\nu)]\sin\frac{k_\nu}{k_2}x\right)\Big\}$$

wobei das Periodizitätsintervall L jetzt von Fall zu Fall als ein bestimmtes geradzahliges Vielfaches von π errechnet wurde.

Nach wie vor betrachten wir die stabile Anfangsbedingung

$$f(v,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

und aus Bezugsgründen nehmen wir weiterhin die Gültigkeit der linearen Dispersionsrelation an:

$$\omega(k) = 1 + \frac{3}{2} k^2 + \cdots$$

Aus der an die Störungstheorie zu stellenden Bedingung

$$\left| k \int_0^t dt' t' E(vt' + \beta, t') \right| \ll 1$$

folgt jetzt in entsprechender Verallgemeinerung, wieder im limes $t \to \infty$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{2} \frac{E^\circ \beta_\nu \cdot K_\nu}{\gamma^2 + K_\nu^2 (v - \bar{v}_\nu)^2} \sin\left(\frac{k_\nu}{k_2} x + \delta_\nu\right) \right| < 1 \qquad (3.21)$$

Hier ist es nun aber nicht möglich, eine ähnlich einfache Bedingung wie (2.25) anzugeben. Die verschiedenen Phasenfaktoren δ_ν können zum Beispiel eine jeweilige Auslöschung der einzelnen Beiträge in (3.21) herbeiführen. Die Bedingung

$$\sum_{\nu=1}^{2} \frac{E^\circ \beta_\nu \cdot K_\nu}{\gamma^2 + K_\nu^2 (v - \bar{v}_\nu)^2} < 1$$

unter der (3.21) dann sicher gilt, wäre zu grob.

So sehen wir hier die Möglichkeit, über einen Effekt der Phasenmischung die für die Störungstheorie wichtige Bedingung

(2.19) im Fall mehrerer Wellen im allgemeinen besser erfüllen zu können, als es bei einer monochromatischen Welle möglich war. Die numerischen Rechnungen für die Funktionaldeterminante

$$\hat{D}et(x,v) := 1 + \sum_{\nu=1}^{Z} \frac{E^{\circ}\beta_\nu K_\nu}{\gamma^2 + K_\nu^2(v-P_\nu)^2} \sin\left(\frac{K_\nu}{K_2}x + \delta_\nu\right)$$

mit (3.22)

$$\tan\delta_\nu = \frac{2\gamma K_\nu (v-P_\nu)}{\gamma^2 - K_\nu^2(v-P_\nu)^2}$$

die auch wieder auf dem Bildschirm des Analogsichtgerätes betrachtet wurden, bestätigen diese Vermutung. Wiederum wurden hier durch eine Unterteilung des Integrationsintervalls und Aussparen des negativen Gebietes der Funktionaldeterminante (3.22) Prozentzahlen gewonnen, die diesen negativen Bereich charakterisieren. So lauten zum Beispiel die jeweiligen maximalen Prozentzahlen, die ebenfalls wieder bei und in der Nähe der Resonanzgeschwindigkeit $P = \frac{\omega(K_0)}{K_0}$ liegen für verschiedene Werte von Z:

Z	7	9	13	21
%	20	16	13	10

Tab. 1

Nun ist aber zu beachten, daß diese Prozentzahlen nicht mit den durch Gleichung (2.30) definierten Gütefaktoren gleichzusetzen sind. Dies liegt daran, daß die Prozentzahlen sich jeweils auf

das ganze Periodizitätsintervall beziehen und so unempfindlich gegenüber einer Änderung von Δk werden.

Durch eine solche Änderung - zum Beispiel eine Vergrößerung von Δk - wird das Wellenpaket im Ortsraum rascher gedämpft und der Einfluß der gefangenen Teilchen sicher kleiner. Bezogen auf das Periodizitätsintervall des Paketes jedoch herrschen annähernd gleiche Verhältnisse, was den negativen Bereich der Funktionaldeterminante betrifft, und damit enthält man etwa die gleichen Prozentzahlen.

Der eindeutige Zusammenhang zwischen dem Verhalten der Funktionaldeterminante und den gefangenen Teilchen geht damit bei mehreren Wellen verloren. Die qualitative Feststellung jedoch, daß es gerade die gefangenen Teilchen sind, die die Bedingung (2.19) verletzen und damit das Verhalten der Funktionaldeterminante in einem für die numerischen Rechnungen ungünstigen Sinn beeinflussen, bleibt bestehen (vgl. Anhang IV).

Übereinstimmend damit liegen die den Einfluß der gefangenen Teilchen charakterisierenden Gütefaktoren g, von denen wir jetzt einige explizit angeben wollen, in einem zur Tab. 1 entsprechenden Bereich. Diese g-Faktoren werden entscheidend durch das Verhältnis $\frac{k_0}{\Delta k}$ bestimmt. Durch passende Wahl von Parameter Z wurden folgende Werte realisiert

$\frac{K^0}{\Delta K}$	7	6	5	4	3.3
$g = \frac{1}{\lambda\pi}\frac{K^0}{\Delta k}\sqrt{k_0 E^0}$	0.25	0.21	0.18	0.14	0.12

Tab. 2

k_0 war hierbei 0.5, E = 0.1. Verschiedene Probeberechnungen zeigten, daß diese k_0-Wahl günstig war, um einerseits einen gut sichtbaren Diffusionseffekt zu bekommen, und andererseits die Bedingung

$$\frac{\omega(k_0)}{k_0} > v_{th} \qquad +)$$

hier in der Form

$$k_0^{-1} + \tfrac{3}{2} k_0 > 1$$

durch

$$2.75 > 1$$

gerade noch zu erfüllen.

Kommen wir nun zur Diskussion der im einzelnen betrachteten Fälle.

I. - Vgl. Abb. 2

Zunächst wurden dem Beispiel 2 auf Seite 43 entsprechende Parameter betrachtet, k = 0.5, E = 0.1, γ = 0.22. Dabei war also die Ungleichung

$$\gamma > \sqrt{k_0 E^\circ}$$

erfüllt. (E° bedeutet jetzt die mittlere Gesamtamplitude der Wellengruppe). Im Unterschied zum Fall der einen monochromatischen Welle kann mit dieser Wahl die Ungleichung (3.21)

+) Man vergleiche betreffs des Bezugsystems die Bemerkung zu Gleichung (2.10)

nicht genau erfüllt werden. Es verbleibt ein negativer Bereich der Funktionaldeterminante von $\sim 10\,\%$, der jedoch auf die berechneten Werte keinen sichtbaren Einfluß hat. Im übrigen erhält man einen analogen Verlauf wie bei der monochromatischen Welle (Abb. 1a) , was auf den großen γ -Wert zurückzuführen ist.

Im folgenden wurde dann stets $\gamma = 0.15$ beibehalten, wie es einem mittleren γ -Wert bei Armstrong [3] entspricht. Kleinere γ -Werte führen wieder zu starken Verletzungen der Bedingung (3.21) und damit zu wenig verläßlichen Werten. Das gleiche gilt für die Wahl der Amplitude $E = 0.1$, jedoch im umgekehrten Sinn.

II. - Vgl. Abb.3, Abb. 4

Diese Kurven zeigen ein gutes diffusionsähnliches Verhalten. Dabei ist in Abb.3 $g \sim 0.14$, in Abb.4 $g \sim 0.13$. Das Maximum an Diffusion liegt hierbei links von der Resonanzgeschwindigkeit. Es ist jedoch in diesem Zusammenhang nochmals zu betonen, daß die Resonanzgeschwindigkeit aus der linearen Dispersionsrelation (1.2) bestimmt wurde, und vor allen Dingen die Rolle einer Bezugsgeschwindigkeit spielt. Aus Vergleich mit den Kurven, die zu einem größeren $\frac{k_0}{\Delta k}$ Verhältnis gehören (kleinere Halbwertsbreite), ist zu folgern, daß ab

$$g < 0.15$$

gute Diffusionskurven betrachtet werden können.

III. - Vgl. Abb.5, Abb. 6, Abb.7

Kurven mit einem

$$g > 0.15$$

zeigen eine zweibucklige homogene Verteilungsfunktion. In diesen Fällen ist das angeregte Wellenspektrum noch nicht breit genug, um einen stabilisierenden Diffusionseffekt erkennen zu lassen. Mit größer werdendem Δk - weniger gefangene Teilchen - verflacht sich die Verteilungsfunktion in der Umgebung der Resonanzgeschwindigkeit immer mehr. Die Voraussetzung für eine Diffusionsnäherung wird besser erfüllt und man erhält schließlich die typischen Diffusionskurven des Falles II.

IV. - Vgl. Abb.8, Abb.9

Bisher wurde aus den oben genannten Gründen $k_0 = 0.5$ gewählt. Verkleinert man k_0, zum Beispiel $k_0 = 0.45$, $k_0 = 0.4$, so erhält man im allgemeinen bessere Diffusionseigenschaften, jedoch auch einen insgesamt kleineren Effekt.

Zusammenfassend können wir sagen, daß das vereinfachte Anfangswertmodell im Rahmen der Hamilton-Jacobitheorie zur Vlasovgleichung bei den üblichen Bedingungen der Anwendbarkeit der Quasilinearen Theorie

$$\frac{\omega(k_0)}{k_0} > 1$$

$$\Delta K > \frac{K_0}{\omega(K_0)} \sqrt{K_0 E^0} \qquad (3.23)$$

auch deren Diffusions-Vorhersage qualitativ bestätigt. Wir haben also den Sachverhalt, daß hier die stabile Anfangs-

bedingung $f(v,t=0) \sim e^{-\frac{v^2}{2}}$ zur Zeit $t = 0$, der an der Stelle $P_0 = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$ ein Wellenpaket mit hinreichend breitem Spektralbereich überlagert ist, der "bump in tail" Situation des selbstkonsistenten Systems der Vlasovgleichung und Poissongleichung entspricht. Man kann sich ja das elektrische Feld entstanden denken durch einen Strahl schneller Elektronen mit der mittleren Geschwindigkeit P_0, die in das Plasma injiziert werden.

Wird die zweite Ungleichung von (3.23) weniger gut erfüllt - bei kleinerer Halbwertsbreite Δk also - werden durch das injizierte elektrische Feld instabile Landaupole möglich - wie es den zweibuckligen Verteilungsfunktionen entspricht (Fall III) +) Bei breiterem Wellenspektrum erfahren sie jedoch eine Stabilisierung, die im Rahmen der Quasilinearen Theorie als Resultat der Teilchen-Wellen Wechselwirkung interpretiert werden kann.

+) In [21] wurden jetzt experimentelle Ergebnisse mitgeteilt, die mit den hier erhaltenen Resultaten qualitativ gut übereinstimmen.

4. Numerische Rechnungen, instabile Anfangsbedingungen

Bisher wurde stets die stabile Maxwellverteilung

$$f(v,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

als Anfangsbedingung verwendet. Angeregt durch numerische Rechnungen bei Armstrong [3], sollte unsere Darstellung des räumlich homogenen Teils der Verteilungsfunktion (2.8) auch auf die stark instabile Anfangsbedingung

$$f(v,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^2 \cdot e^{-\frac{v^2}{2}} \qquad (4.1)$$

angewendet werden.

Zunächst betrachtet Armstrong die allgemeine Verteilung

$$f(v,t=0) = \frac{v^2+b}{1+b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}}$$

die nach dem Penrose-Kriterium instabil ist für alle $b < 1$. Aus numerischen Erwägungen wird dann der Fall $b = 0$ ausgewählt.

4.1 Monochromatische Welle

Zur Behandlung in unserem Modell gehen wir auf die Gleichung (3.1) zurück. In dem für die homogene Verteilungsfunktion typischen Integral

$$\int_0^t dt' \cdot E(vt'+\beta,t')$$

ist es aber jetzt nicht mehr zulässig, nur den asymptotischen Wert für $t \to \infty$ zu bestimmen und deshalb allein die Anfangsamplitude des elektrischen Feldes zu betrachten.

Wir können hier jedoch umgekehrt schließen: in dem instabilen Fall kann die Anfangsbedingung vernachlässigt und damit die untere Grenze des Integrals durch $-\infty$ ersetzt werden. Es verbleibt dann allein der Beitrag von der oberen Grenze, den wir in Analogie zu dem Ansatz einer gedämpften monochromatischen Welle leicht auswerten können. Es entsteht

$$f_h(v,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \, f\left(v - E(t)\,\frac{\gamma \cos x - K(v-\bar{v})\sin x}{\gamma^2 + K^2(v-\bar{v})^2}\right)\left(1 + \frac{E(t)\cdot K}{\gamma^2 + K^2(v-\bar{v})^2}\sin(x+\delta)\right) \qquad (4.2)$$

Der einzige Unterschied, wenn man mit dem entsprechenden Fall der stabilen Anfangsbedingung vergleicht (4.2), besteht also in der Ersetzung $E^0 \to E(t)$.

Nun können wir eigentlich nicht mehr von einem Anfangswertmodell sprechen: um die homogene Verteilungsfunktion zum Zeitpunkt t auszurechnen, benötigen wir das elektrische Feld zum gleichen Zeitpunkt. Diese Information kann jedoch nicht im Rahmen unserer Theorie erfolgen.

Wir haben dann die entsprechenden $E(t)$-Werte aus der Abb.33 bei Armstrong [3] entnommen, und zu

$$\begin{aligned} E(10) &= 0.02 \qquad & E(20) &= 0.218 \\ E(17) &= 0.12 \qquad & E(30) &= 0.178 \end{aligned} \qquad (4.3)$$

bestimmt. Zum Vergleich bemerken wir, daß die Anfangs-

amplitude $E(0) = 0.01$ war. Genauer haben wir mit den obigen Werten auch nur die erste Fourierkomponente betrachtet, die allein instabil sein soll. Für γ wurde die ebenfalls angegebene Wachstumsrate dieser ersten Fourierkomponente benutzt, $|\gamma| = 0.245$.

Wir müssen ferner beachten, daß in unserem Modell die Phasengeschwindigkeit P zunächst ein freier Parameter geworden ist. Bisher war sie stets über die als gültig angenommene lineare Dispersionsrelation (1.2) mit der Wellenzahl verknüpft. Dies erscheint jetzt nicht mehr sinnvoll.

Um einen groben Überblick über die Dispersionsrelation im betrachteten instabilen Fall zu erhalten, versuchen wir die Anfangsverteilung (4.1) durch zwei Deltafunktionen zu beschreiben.

$$f(v,t=0) = \frac{1}{2}\left(\delta(v+P) + \delta(v-P)\right) \qquad (4.4)$$

Die aus der linearen Näherung zur Vlasovgleichung folgende allgemeine Dispersionsrelation liefert dann in diesem Fall eine quadratische Gleichung für ω^2 [20],

$$\omega^2 = (kP)^2 + \frac{1}{2} \pm \sqrt{2kP + \frac{1}{4}}$$

und für $k \to 0$ lautet die hier interessierende Lösung mit Imaginärteil $\omega > 0$

$$\begin{matrix} \mathrm{Im}\,\omega \sim \sqrt{2kP} + \cdots \sim \sqrt{3k} + \cdots \\ \mathrm{Re}\,\omega \sim 0 \end{matrix} \qquad (4.5)$$

wenn wir noch $P = \sqrt{2}$ verwenden, wie es die Abszisse des Maximums einer Kurve $\sim v^2 e^{-\frac{v^2}{2}}$ entspricht. Hier ist es demnach

sinnvoll, in erster Näherung den Parameter $P = 0$ zu setzen.

Grundlage für die numerischen Rechnungen war die Darstellung (4.2) mit $P = 0$. Analog zu dem Fall der monochromatischen Welle bei stabilen Anfangsbedingungen verletzen die gefangenen Teilchen die Gültigkeitsbedingung der Störungstheorie - die hier entsprechend zu (2.25) mit

$$\frac{E(t)\cdot\kappa}{\gamma^2+\kappa^2(v-P)^2} < 1 \qquad (4.6)$$

angegeben werden kann - sobald für die Resonanzstelle $v = P$

$$\gamma^2 < \kappa E(t) \qquad (4.7)$$

geworden ist.

Für die gewählten Werte $|\gamma| = 0.245$ und $k = 0.5$ und den dazugehörigen $E(t)$-Werten nach (4.3) gestattet die Ungleichung (4.6) nur bis $t \sim 17$ fortzuschreiten. Bis zu dieser Zeit spielen also die gefangenen Teilchen keine Rolle. Für größere Zeiten wird sie durch die Bedingung (4.6) wieder zu stark verletzt und man erhält wenig verläßliche Werte.

Da bis zu diesen Zeiten die erhaltenen Kurven sich fast nicht von denen unterscheiden, die mit mehreren Wellen gewonnen wurden, verweisen wir bezüglich der Darstellung und Diskussion auf den nächsten Abschnitt.

4.2 Mehrere Wellen

Die Erweiterung auf die Betrachtung mehrerer Wellen erfolgte ebenfalls wieder analog zur Behandlung in Abschnitt 3 . Die P_ν-Werte wurden hier in einem schmalen, sonst willkürlich gewähltem ΔV- Bereich symmetrisch um den Punkt $v = 0$ aufgeteilt. Verschiedene Wahl von ΔV zeigte, daß die genaue Breite dieses Bereiches, und damit also die genaue Form einer Dispersionsrelation, keinen wesentlichen Einfluß auf die Ergebnisse hat. Wichtig allein ist, daß die Wellenzahlen k_ν zur nahen Umgebung der Frequenz σ gehören.

Die so gewonnenen Kurven für den räumlich homogenen Teil der Verteilungsfunktion sind in Abb.10 - 13 dargestellt, aus denen auch die benutzten Parameterwerte entnommen werden können. Vergleichsrechnungen mit leicht abgeänderten Werten für $|\gamma|$ und k führten zu qualitativ gleichen Resultaten.

Für $t = 10$ - vgl. Abb.10 - liegt die Abweichung

$$f_h(v, t=10) - f_h(v, t=0)$$

noch unter der Zeichengenauigkeit.

Mit wachsender Zeit beginnt sich dann "das Loch" in der Nachbarschaft des Minimums bei $v = 0$ aufzufüllen und es scheint sich ein stationärer Zustand auszubilden (vgl. Abb.11 - 13).

Die Kurven haben bei $v = 0$ eine horizontale Tangente; dies ist wegen ihrer Symmetrie für $v \longrightarrow -v$ ein physikalisch vernünftiges Verhalten.

In [3] , [15] wird die Vermutung ausgesprochen, daß bei der

stark instabilen Anfangsbedingung (4.1) sich im Plasma ein räumlich inhomogenes Gleichgewicht ausbildet.

Unsere im Rahmen der Hamilton-Jacobitheorie erhaltenen Kurven für die räumlich gemittelten Verteilungsfunktionen stimmen damit überein. Für mehrere Wellen entsprechen die Ergebnisse der Diffusionsvoraussage der Quasilinearen Theorie, obgleich in diesem Fall die übliche Quasilineare Theorie nicht anwendbar sein sollte (die im Ruhesystem des Plasmas gemessene Phasengeschwindigkeit der instabilen Wellen ist klein gegenüber der thermischen Geschwindigkeit).

Abschließend kann gesagt werden, daß auch unter der stark instabilen Anfangsbedingung (4.1) für

$$v_p < v_{th}$$

eine aus der Wechselwirkung zwischen Welle und Teilchen resultierende Stabilisierung zu erkennen ist.

Zusammenfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Darstellung von räumlich homogenen mikroskopischen Größen im Rahmen der Hamilton-Jacobitheorie der Vlasovgleichung.
Es wird eine verallgemeinerte Diffusionsgleichung für den räumlich homogenen Teil der Verteilungsfunktion im (x,α,t)-Raum der Theorie abgeleitet, aus der nach einer zusätzlichen Diffusionsnäherung in niedrigster Ordnung die bekannte Diffusionsgleichung der Quasilinearen Theorie folgt. Die Gültigkeit der Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Gesamtteilchenzahl kann allgemein im Rahmen dieser Theorie gezeigt werden.

In einem vereinfachten Anfangswertmodell zur Vlasovgleichung werden dann räumlich homogene Verteilungsfunktionen im Rahmen dieser Theorie numerisch berechnet. Die Anregung einer monochromatischen Welle sowie der entgegengesetzte Fall - Anregung eines ganzen k-Spektrums - werden sowohl für stabile als auch für stark instabile Anfangsbedingungen behandelt.

Das vereinfachte Anfangswertmodell kann zunächst im Fall einer monochromatischen Welle erfolgreich mit anderen Theorien verglichen werden. Für den Fall der Anregung eines Wellenpaketes bei stabilen Anfangsbedingungen gelingt es, die "bump in tail" Situation der Quasilinearen Theorie numerisch zu beschreiben. So kann hier erstmals die Anregung eines hinreichend kontinuierlichen k-Spektrums numerisch betrachtet werden. Es entstehen Ergebnisse, die der Diffusions-

voraussage der Quasilinearen Theorie entsprechen.

Auch für eine stark instabile Anfangsbedingung und hinreichend breites k-Spektrum erhalten wir Resultate, die qualitativ mit den Folgerungen der Quasilinearen Theorie übereinstimmen, obwohl in diesem Fall die Quasilineare Theorie nicht anwendbar ist (die im Ruhesystem des Plasmas gemessene Phasengeschwindigkeit der instabilen Wellen ist klein gegenüber der thermischen Geschwindigkeit).

In der diesen numerischen Rechnungen zugrunde liegenden Störungstheorie können ab der zweiten Ordnung säkulare Terme möglich werden, deren Einfluß wesentlich durch die gefangenen Teilchen bestimmt ist, und die in dieser Hinsicht als unvermeidbar anzusehen sind. Die bekannten Ungleichungen für die gefangenen Teilchen können aus allgemeinen Bedingungen an die Störungstheorie abgeleitet und ihr Einfluß auf die numerischen Rechnungen jeweils verfolgt werden.

Herrn Professor Dr. L. Biermann möchte ich an dieser Stelle herzlich danken für die Aufnahme und Arbeitsmöglichkeit im Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik.
Herrn Privatdozent Dr. Pfirsch danke ich sehr für die Anregung zu dieser Arbeit, für sein freundliches, förderndes Interesse und die Durchsicht des Manuskripts sowie für zahlreiche Hinweise zum Gegenstand der Arbeit.

Der Max-Planck-Gesellschaft bin ich für ein Stipendium sehr verbunden.

Anhang I: Makroskopische Größen als Funktionale von $S = S(x,\alpha,t)$

Die einfachsten [+)] makroskopischen Größen können in einer mikroskopischen Theorie dargestellt werden durch Integrale über den Geschwindigkeitsraum mit dem allgemeinen Integranden

$$v^n \cdot f(x,v,t) \qquad n = 0,1,2$$

wobei f(x,v,t) die Einteilchenverteilungsfunktion ist. Durch die kanonische Transformation auf die Konstanten der Bewegung (α, β) entsteht

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dv \cdot f(x,v,t) \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} \cdot f(\alpha)$$

wobei wieder auf in nullter Ordnung homogene Systeme spezialisiert ist. Also

$$A(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^n \cdot f(\alpha) \qquad n = 0,1,2 \ ,$$

für n = 0 entsteht die Elektronendichte

$$n(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \, \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} f(\alpha) = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial S}{\partial x}$$

für n = 1 der Teilchenstrom

$$j(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \, \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) f(\alpha) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2$$

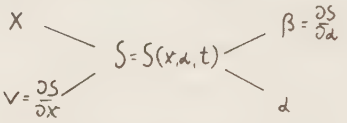
für n = 2 die kinetische Energie

$$T(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \, \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \cdot f(\alpha) = -\frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^3$$

+) Zum Beispiel nicht die potentielle Energie, zu deren Darstellung man im allgemeinen eine Mehrteilchenverteilungsfunktion benötigt.

Anhang II: Störungstheorie im (x,α,t)-Raum

Das die Transformation charakterisierende Schema lautet hier



und S genügt der Hamilton-Jacobigleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0$$

also in der Anwendung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \phi(x,t) = 0$$

Dann wird das elektrische Feld als Störung betrachtet, und in nullter Ordnung entsteht

$$\frac{\partial S^0}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^0}{\partial x}\right)^2 = 0$$

mit der Lösung

$$S^0(x,\alpha,t) = -\frac{1}{2}\alpha^2 t + \alpha x$$

$$\beta^0 := \frac{\partial S^0}{\partial \alpha} = -\alpha t + x$$

$$V^0 := \frac{\partial S^0}{\partial x} = \alpha$$

in erster Ordnung

$$\frac{\partial S^1}{\partial t} + \alpha \frac{\partial S^1}{\partial x} + \phi(x,t) = 0$$

$$S^1(x,\alpha,t) = -\int_0^t \phi(x-\alpha(t-t'),t')\,dt'$$

$$\beta^1 = \frac{\partial S^1}{\partial \alpha} = -\int_0^t (t-t')\,E(x-\alpha(t-t'),t')\,dt'$$

$$V^1 = \frac{\partial S^1}{\partial x} = \int_0^t E(x-\alpha(t-t'),t')\,dt'$$

Die nullte und erste Ordnung zusammen ergeben für den Ort die folgende Darstellung

$$X = \alpha t + \beta + \int_0^t (t-t')\cdot E(x-\alpha(t-t'),t')\,dt'$$

Setzt man noch im Argument von E das entsprechende Ergebnis der nullten Ordnung ein, so entsteht:

$$X = \alpha t + \beta + \int_0^t (t-t')\cdot E(vt'+\beta,t')\,dt'$$

also genau das auf Seite 26 erhaltene Ergebnis.

In zweiter Ordnung ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial S^2}{\partial t} + \alpha\frac{\partial S^2}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial S^1}{\partial x}\right)^2 = 0$$

mit der Lösung

$$S^2(x,\alpha,t) = -\frac{1}{2}\int_0^t dt'\left(\int_0^{t'} dt''\,E(x-\alpha(t-t'',t')\right)^2$$

Zusammengefaßt haben wir einschließlich der zweiten Ordnung die folgende Darstellung der erzeugenden Funktion S .

$$S(x,\alpha,t) = -\frac{\alpha^2}{2}t + \alpha x - \int_0^t \phi(x-\alpha(t-t'),t')\,dt' -$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^t dt' \left(\int_0^{t'} E(x-\alpha(t-t''),t'')\,dt'' \right)^2 - \dots$$

Anhang III: Integrationen der ersten und zweiten Ordnung

In der ersten Ordnung ist zu berechnen

$$J_1 := \int_0^t dt' \, E(vt'+\beta, t') \qquad \text{mit} \qquad E(x,t) = E^0 \cdot e^{-\gamma t} \cdot e^{i\kappa(x-Pt)}$$

woraus im asymptotischen Fall $t \to \infty$ folgt

$$J_1 = E^0 \, \frac{\gamma \cos\kappa\beta - \kappa(v-P)\sin\kappa\beta}{\gamma^2 + \kappa^2(v-P)^2}$$

Ferner benötigen wir das Integral

$$-\frac{\partial}{\partial\beta} \int_0^{t\to\infty} dt' \cdot t' \cdot E(vt'+\beta, t') = -\frac{\partial J_1}{\partial v}$$

$$= \frac{E^0 \kappa}{\left[\gamma^2 + \kappa^2(v-P)^2\right]^2} \left(2\kappa(v-P)\,\gamma \cdot \cos\kappa\beta + \left(\gamma^2 - \kappa^2(v-P)^2\right) \sin\kappa\beta \right)$$

$$= \frac{E^0 \kappa}{\gamma^2 + \kappa^2(v-P)^2} \, \sin(\kappa\beta + \delta)$$

mit

$$\tan\delta = \frac{2\gamma\kappa(v-P)}{\gamma^2 - \kappa^2(v-P)^2}$$

In der zweiten Ordnung tritt hinzu

$$J_2 := \frac{\partial}{\partial\beta} \left\{ \int_0^t dt' \, E(vt'+\beta, t') \cdot \int_0^{t'} dt'' \cdot t'' \, E(vt''+\beta, t'') \right\}$$

Von den beiden komplexen Integralen A,B in der geschweiften Klammer ist dabei jeweils der Realteil zu nehmen. So wird

$$J_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\,\mathrm{Re}\,(AB + A^*B) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\beta}\,\mathrm{Re}\,AB$$

da in A^*B die β-Abhängigkeit gerade herausfällt.
Im limes $t\to\infty$ verbleibt

$$A\cdot B = \frac{E^2}{4}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{e^{2i\kappa\beta}}{[\gamma - i\kappa(v-p)]^3}$$

also

$$J_2 = -\frac{E^{o2}}{4}\cdot\kappa\,\frac{[3\gamma^2\kappa(v-p) - \kappa^3(v-p)^3]\cos 2\kappa\beta + [\gamma^3 - 3\gamma\kappa^2(v-p)^2]\sin 2\kappa\beta}{[\gamma^2 + \kappa^2(v-p)^2]^3}$$

Anhang IV: Kontinuitätsgleichung für die Funktionaldeterminante

Wir zeigen hier zunächst, daß die Funktional"determinante" $\frac{\partial^2 S}{\partial v \partial \beta}$, die wir jetzt mit ς bezeichnen wollen, einer Kontinuitätsgleichung im Geschwindigkeitsraum genügt.

[Pfirsch, mündl. Mitteilung]

Dazu gehen wir aus von der Hamilton-Jacobigleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{v^2}{2} + \phi\left(\frac{\partial S}{\partial v}, t\right)$$

woraus durch Differentiation nach β und v die gewünschte Kontinuitätsgleichung folgt

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left[E(x(v,\beta,t)) \cdot \varsigma\right] = 0 \qquad (\text{IV} - 1)$$

(IV - 1) kann als Erhaltungssatz für die Konstante der Bewegung $\alpha = \frac{\partial S(v,\beta,t)}{\partial \beta}$ interpretiert werden.

Hieraus folgt aber, daß bei der Anfangsbedingung

$$\varsigma(v,\beta,t=0) = 1$$

der exakte Ausdruck $\varsigma(v,\beta,t)$ für alle Zeiten positiv definit bleibt.

Nur die den numerischen Rechnungen zugrunde liegende Störungstheorie zerstört diese angenehme Eigenschaft: in den einzelnen Ordnungen gelten keine Kontinuitätsgleichungen mehr. In Analogie zu Abschnitt 2.3 wäre hier zu setzen

$$\varsigma = \varsigma^0 + \varsigma^1 + \cdots$$

$$\varsigma^0(v,\beta,t=0) = 1$$

$$\frac{\partial S^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}\left[E\left(\frac{\partial S^{(n-1)}}{\partial v}, t\right) \cdot S^{(n-1)}\right] = 0 \qquad n \geq 1$$

So entsteht zum Beispiel in der ersten Ordnung die Darstellung

$$S^{(1)} = -\frac{\partial}{\partial v}\int_0^t dt' E(vt'+\beta, t') = -\int_0^t dt' t' \frac{\partial}{\partial \beta} E(vt'+\beta, t') \equiv \frac{\partial^2 S^1}{\partial v \partial \beta}$$

Unsere Bedingung an die Störungstheorie ist hier durch

$$\left|S^1\right| < 1 \qquad \text{(IV-2)}$$

zu formulieren, was in der Anwendung auf Wellen mit der Wellenzahl k zu

$$\left|k \frac{\partial S^1}{\partial v}\right| < 1$$

äquivalent ist.

Die Korrektur zur nullten Ordnung der Funktionaldeterminante durch das eingeschaltete elektrische Feld sollte demnach klein sein. Dies schließt wieder die gefangenen Teilchen aus, die stets eine starke Wechselwirkung mit dem elektrischen Feld erleiden.

Damit haben wir nun den ausgesprochenen allgemeinen Sachverhalt, daß die gefangenen Teilchen das Verhalten der Funktionaldeterminante in einem für die numerischen Rechnungen ungünstigen Sinn beeinflussen, wie es für den Fall der monochromatischen Welle im Abschnitt 3.1 explizit gezeigt wurde.

Wir wollen hier noch bemerken, daß eine allgemeine Lösung von (IV-1) nach der Charakteristikenmethode mit

$$S(v, \beta, t) = e^{-\frac{\partial}{\partial v}\int_0^t dt' E(x(v(t'), \beta, t'), t')} \qquad \text{(IV-3)}$$

angegeben werden kann, wobei das Integral längs der charakteristischen Kurve

$$\frac{dv}{dt} = E(x(v,\beta,t),t) \qquad (\text{IV}-4)$$

zu bestimmen ist.

Auf der Grundlage der beiden letztgenannten Gleichungen könnte ein grundsätzlich anderes Näherungsverfahren aufgebaut werden, in dem dann nicht nach der Amplitude des elektrischen Feldes entwickelt wird und stets eine positiv - definite Darstellung für ϱ in Form der Gleichung (IV-3) gilt. Diese geforderte störungstheoretische Lösung der Gleichung (IV-4) scheint uns jedoch auch numerisch ein unhandliches Problem zu sein.

Literatur

[1] D. Pfirsch, Nucl. Fus. 6, 301 (1966)

[2] Y.Y. Lee, U. of Michigan, Diss. 1964

[3] T.P. Armstrong, U. of Iowa Report 66-34 +)

[4] I.B. Bernstein, F. Englmann, Phys. Fluids 9, 937 (1966)

[5] A. Orzag, H. Kraichnan, Modelequations for Strong Turbulance in a Vlasov Plasma, Report

[6] R.E. Aamodt, W.E. Drummond, IAEA Conf., Culham 1965

[7] V.N. Tsytovich, V.D. Shapiro, Nucl. Fus. 5, 228 (1965)

[8] A.A. Vedenov, E.P. Velikhow, R.Z. Sagdeev, Nucl.Fus. Suppl. 2, 465 (1962)

[9] W.E. Drummond, D. Pines, Nucl. Fus. Suppl. 3, 1049 (1962)

[10] W.E. Drummond, D. Pines, Ann. of Phys. 28, 478 (1964)

[11] A.A. Vedenov, E.P. Velikhow, JETP (engl.) 16, 682 (1963)

[12] E. Friemann, P. Rutherford, Ann. of Phys. 28, 138 (1964)

[13] R.C. Davidson, AEC-Report MATT-496 (1966)

[14] D. Pfirsch, Orsay-Sommerschool (1966)

[15] T.P. Armstrong, D. Montgomery, U. of Iowa Report 67-11

[16] G. Knorr, Z. f. Naturf. 18a, 1304 (1963)

[17] F.C. Grant, M.R. Feix, Phys. Fluids 10, 696 (1967)

[18] L.M. Altshul, V.I. Karpmann, JETP (engl.) 22, 361 (1966)

[19] V.I. Karpmann, A Quasilinear Theorie of the propagation of monochromatic Wave in a Plasma, Report

[20] G. Knorr, M.P.I-Bericht, MPI/PA-14/63

[21] J.F. Decker, J.L. Hirshfield, Proceed.of conf.Physics of Quiescent Plasmas, Frascati 1967

+) Eine Zusammenfassung von [3] findet man jetzt auch in Phys. Fluids 10, 1269 (1967)

Liste der Abbildungen

Abb.1 Abb.1a	f (v,t=0)	und	f (v,t=∞)	stabile Anfangsbedingungen monochromatische Welle (zu Seite 42)
Abb.2	f (v,t=0)	und	f (v,t=∞)	stabile Anfangsbedingungen mehrere Wellen, Fall I (zu Seite 56)
Abb.3 Abb.4	f (v,t=0)	und	f (v,t=∞)	stabile Anfangsbedingungen mehrere Wellen, Fall II (zu Seite 57)
Abb.5 Abb.6 Abb.7	f (v,t=0)	und	f (v,t=∞)	stabile Anfangsbedingungen mehrere Wellen, Fall III (zu Seite 58)
Abb.8 Abb.9	f (v,t=0)	und	f (v,t=∞)	stabile Anfangsbedingungen mehrere Wellen, Fall IV (zu Seite 58)
Abb.10	f (v,t=0)	und	f (v,t=10)	
Abb.11	f (v,t=0)	und	f (v,t=17)	instabile Anfangsbedingungen
Abb.12	f (v,t=0)	und	f (v,t=20)	mehrere Wellen
Abb.13	f (v,t=0)	und	f (v,t=30)	(zu Seite 63a/64)

Die jeweiligen Werte der Parameter können den Abbildungen entnommen werden.

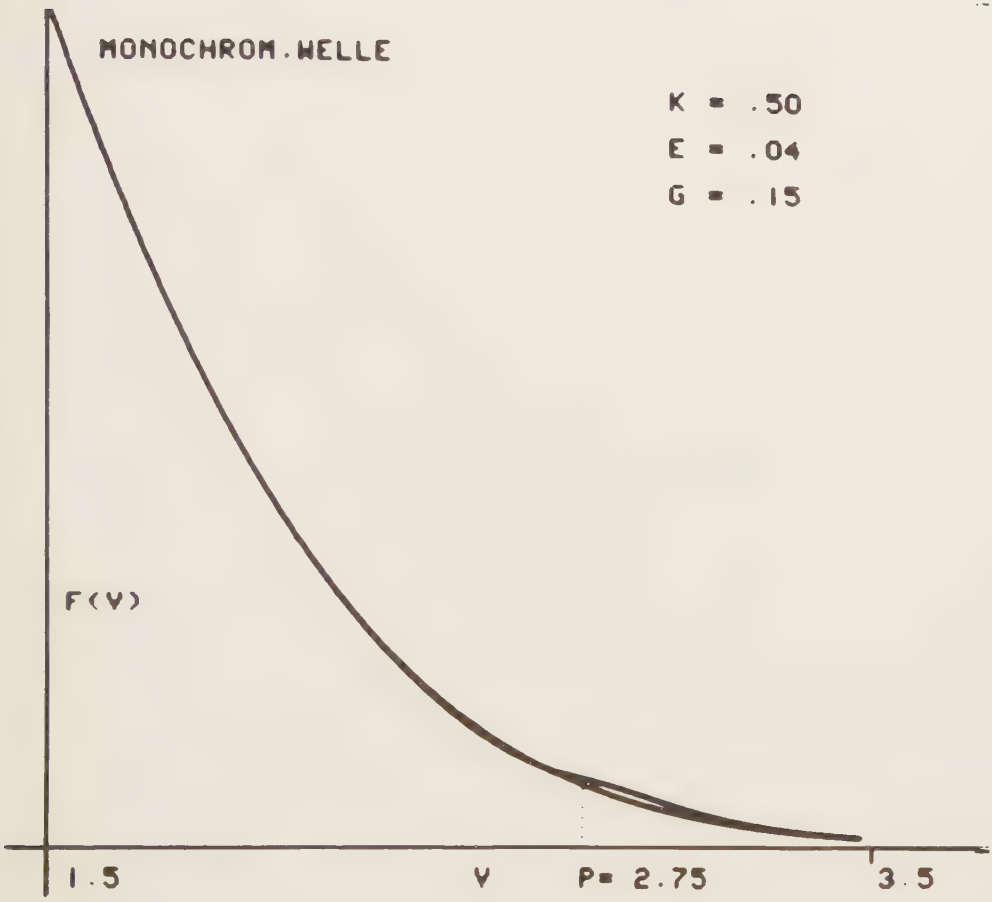


Abb. 1

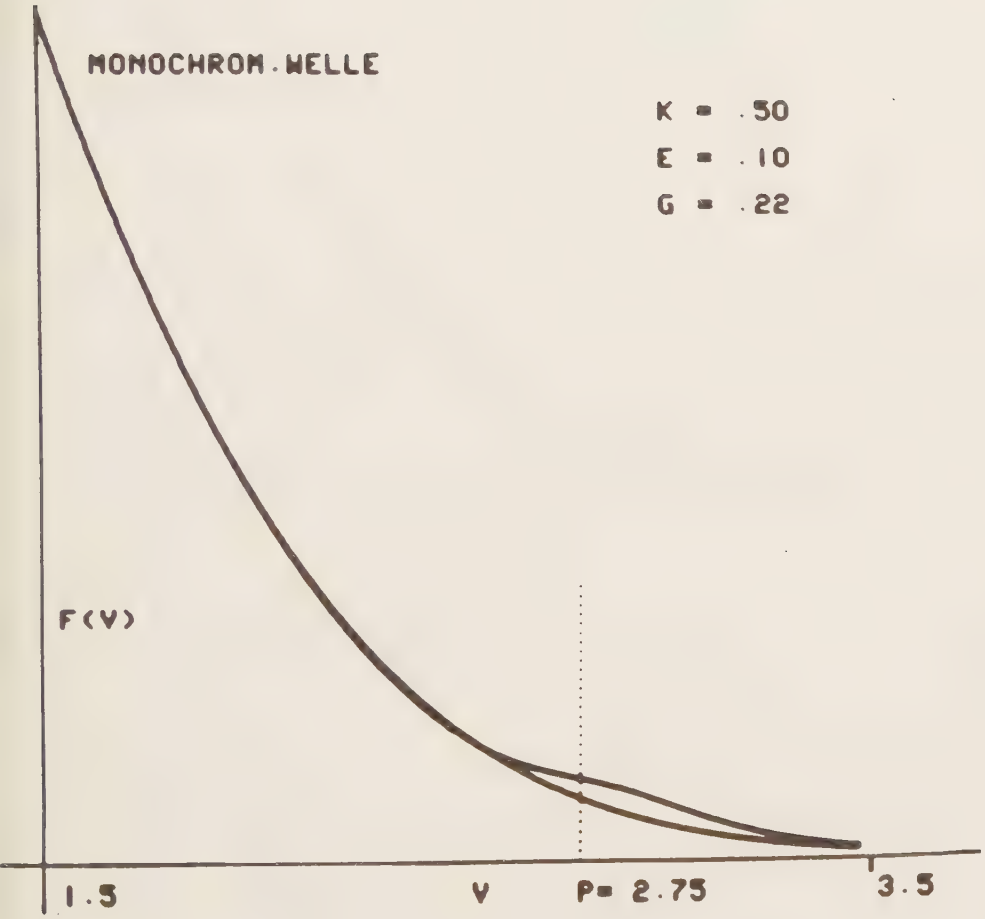


Abb.1a

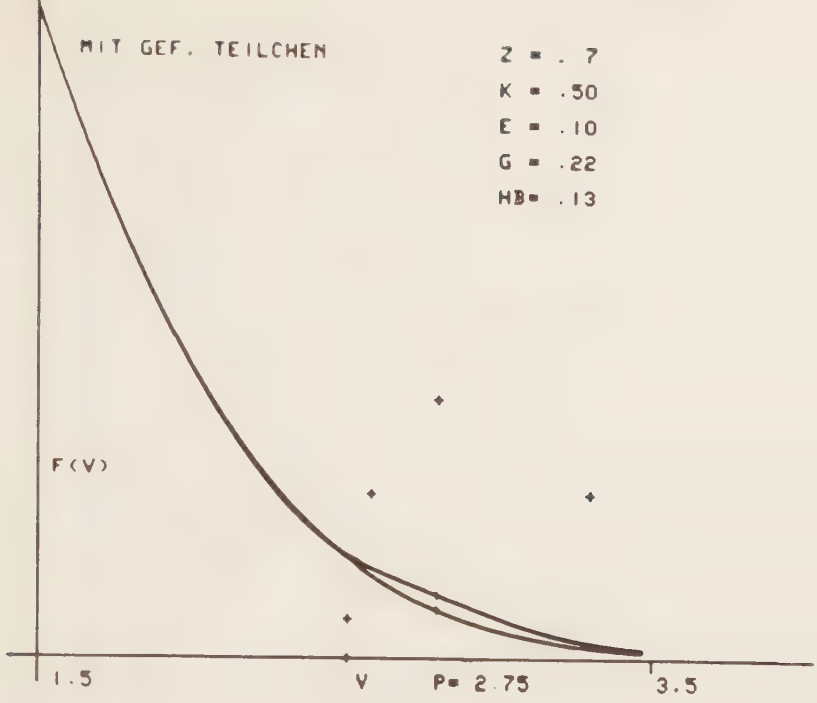

MIT GEF. TEILCHEN
Z = .7
K = .50
E = .10
G = .22
HB= .13
F(V)
1.5
V
P= 2.75
3.5

Abb.2

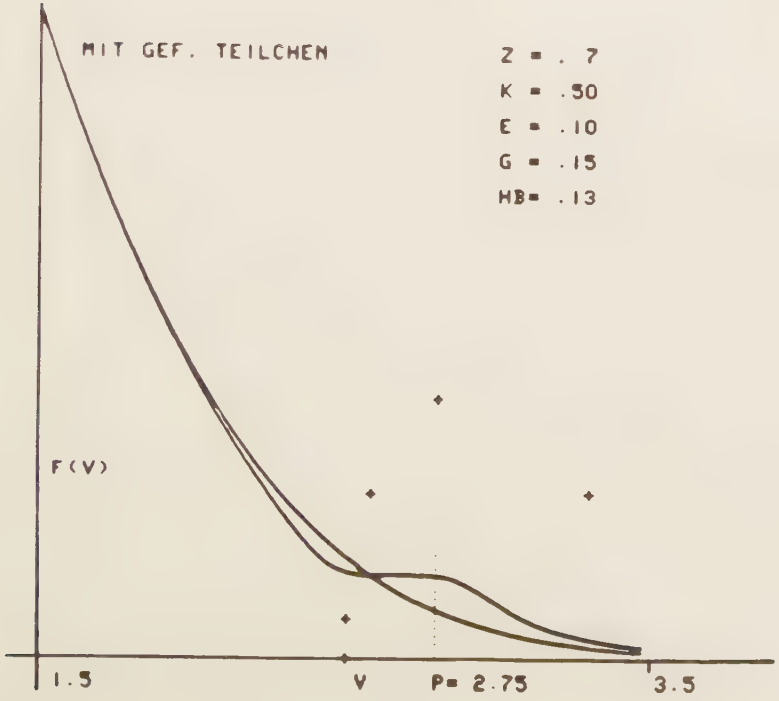

MIT GEF. TEILCHEN
Z = .7
K = .50
E = .10
G = .15
HB= .13
F(V)
1.5
V
P= 2.75
3.5

Abb.3

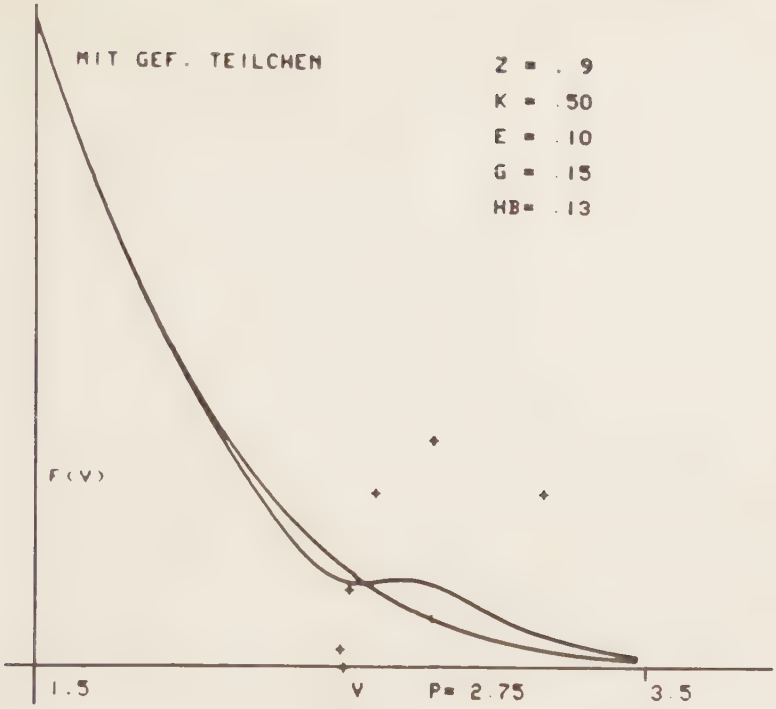

MIT GEF. TEILCHEN
Z = .9
K = .50
E = .10
G = .15
HB= .13
F(V)
1.5
V
P= 2.75
3.5

Abb.4

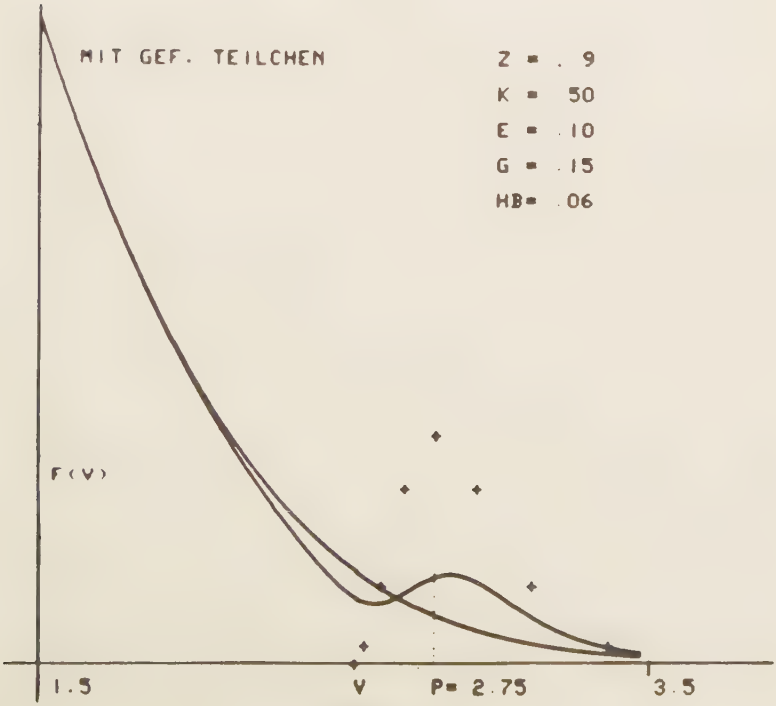

MIT GEF. TEILCHEN
Z = .9
K = 50
E = .10
G = .15
HB= .06
F(V)
1.5
V
P= 2.75
3.5

Abb.5

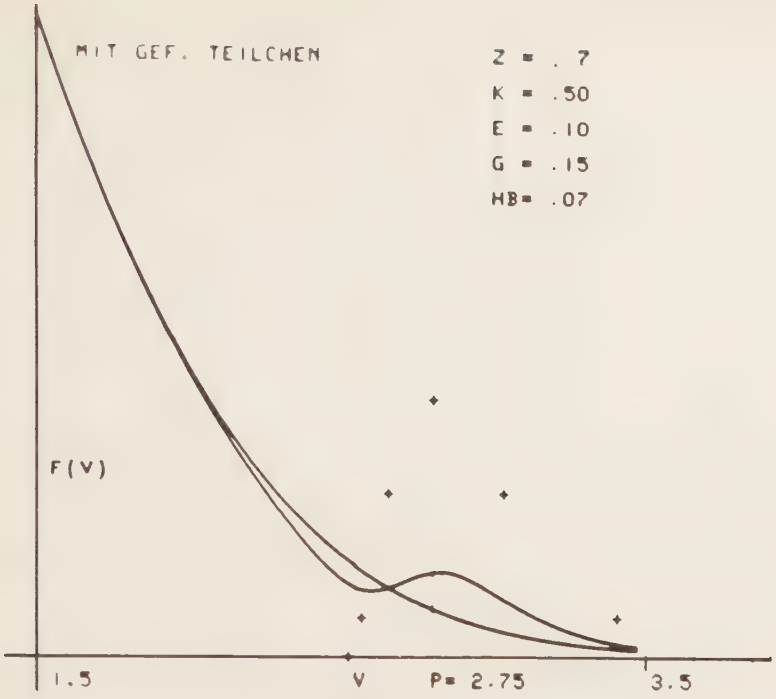

MIT GEF. TEILCHEN
Z = .7
K = .50
E = .10
G = .15
HB= .07
F(V)
1.5
V
P= 2.75
3.5

Abb.6

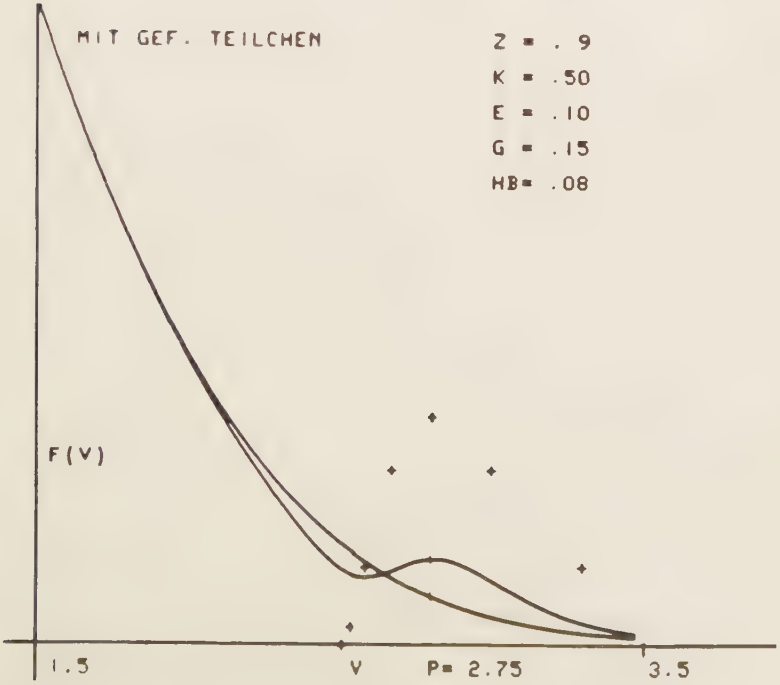

MIT GEF. TEILCHEN
Z = .9
K = .50
E = .10
G = .15
HB= .08
F(V)
1.5
V
P= 2.75
3.5

Abb.7

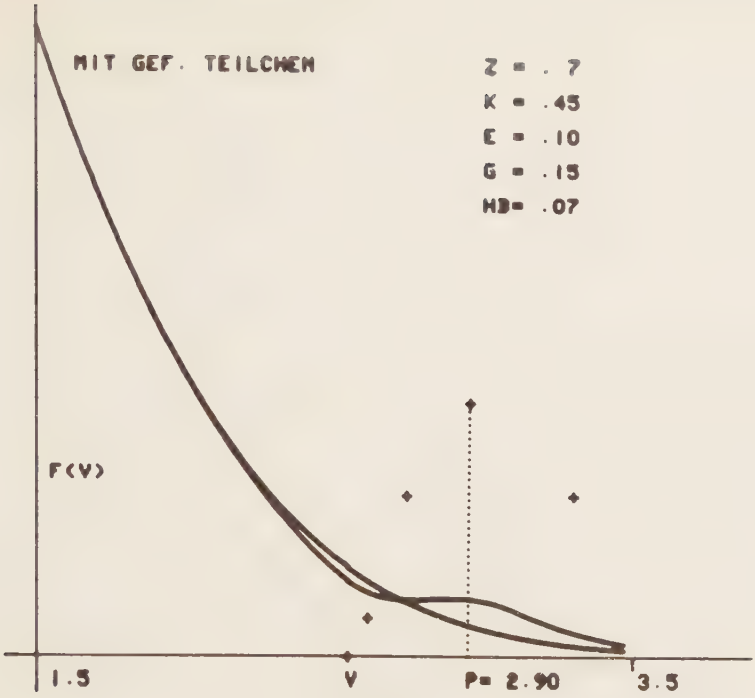

MIT GEF. TEILCHEN
Z = .7
K = .45
E = .10
G = .15
HB= .07
F(V)
1.5
V
P= 2.90
3.5

Abb.8

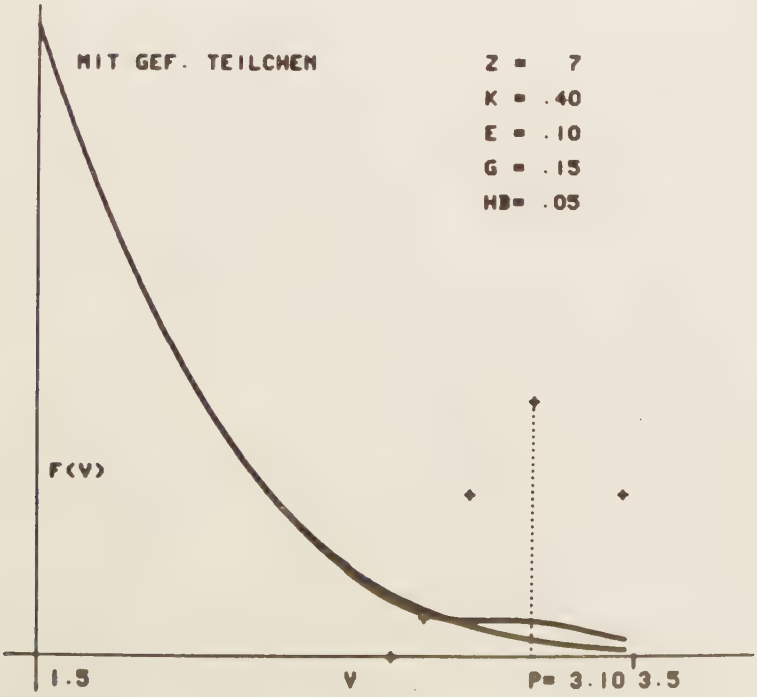

MIT GEF. TEILCHEN
Z = 7
K = .40
E = .10
G = .15
HB= .05
F(V)
1.5
V
P= 3.10
3.5

Abb.9

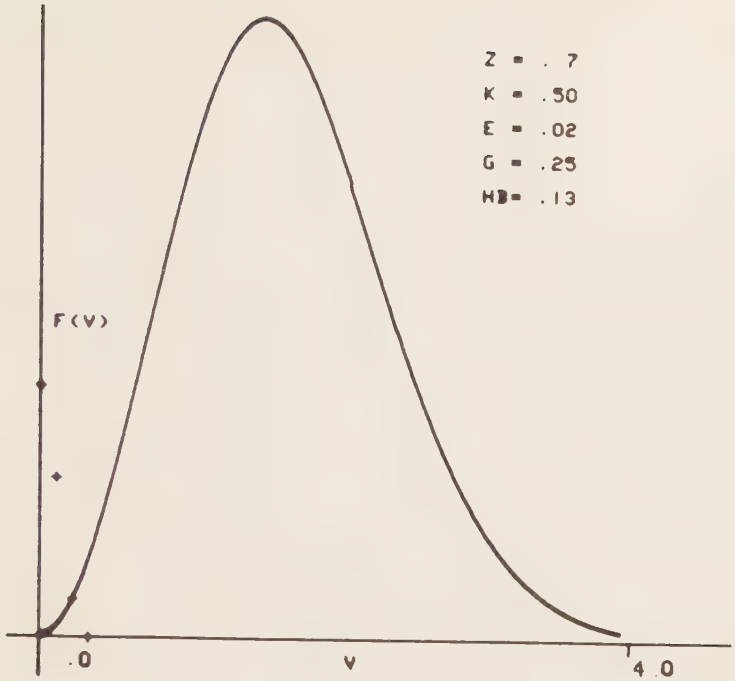


Abb.10

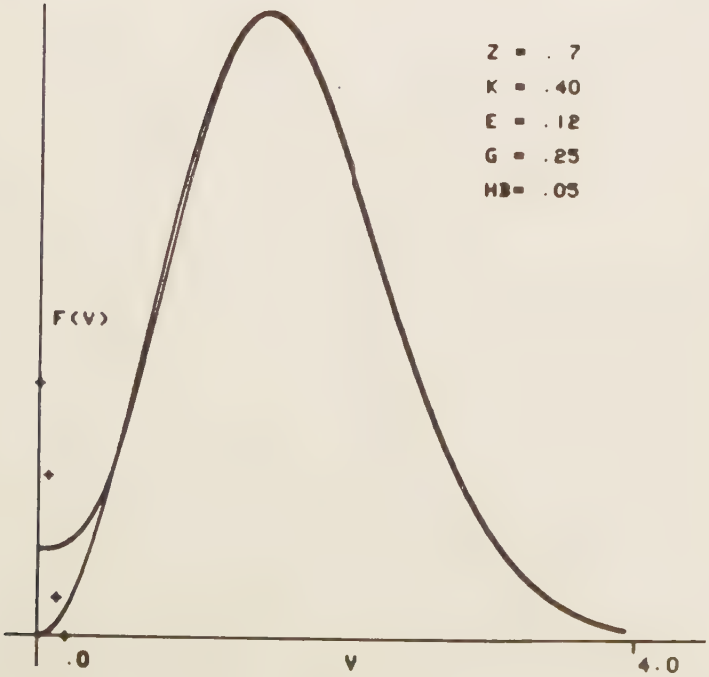


Abb.11

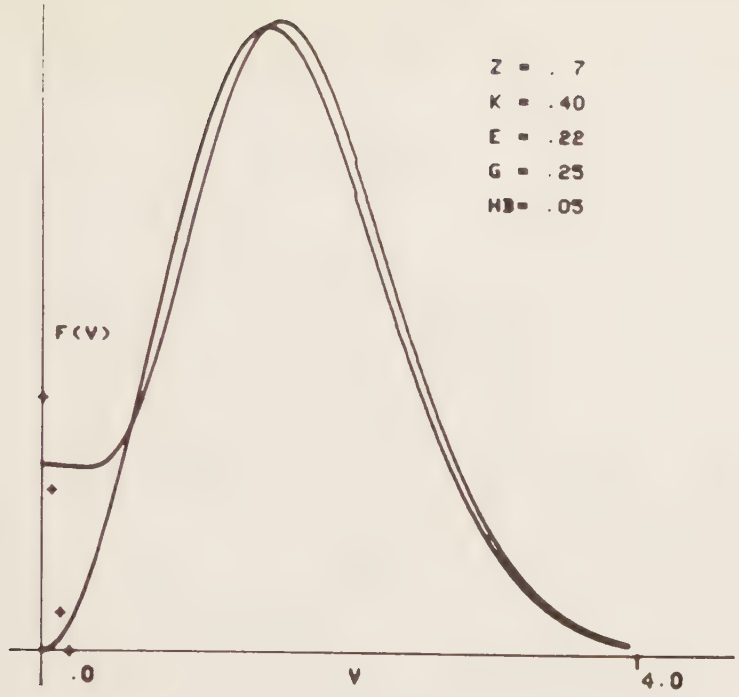


Abb.12

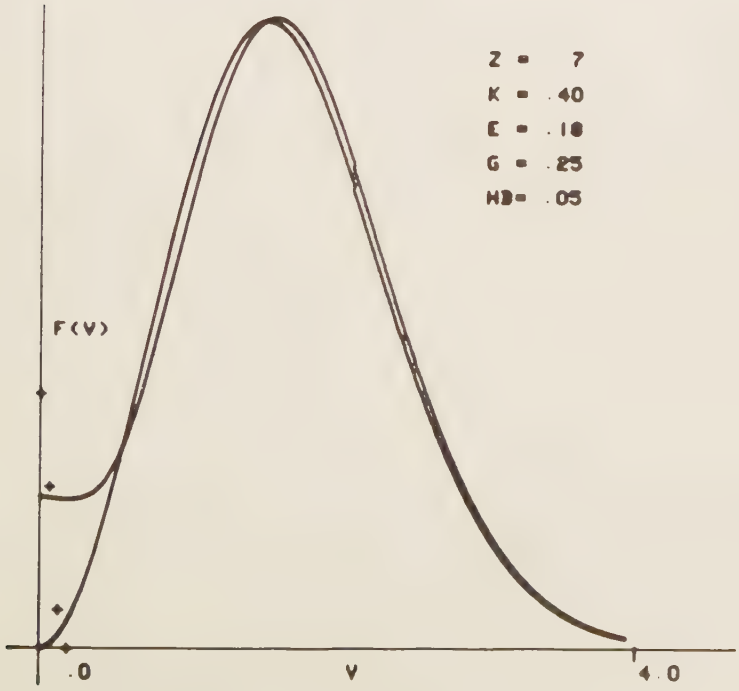


Abb.13

Lebenslauf

Ich bin am 18.3.1938 in Leipzig als zweites Kind geboren. Meine Eltern sind der Fahrlehrer Otto Stuntz und seine Ehefrau Charlotte, geb. Adler. - 1944 kam ich in Braunsdorf bei Karl-Marx-Stadt (Chemnitz) in die Grundschule. 1947 zogen wir wieder nach Leipzig, und 1952 beendete ich hier die Grundschulausbildung. Ich besuchte von 1952 bis 1956 die Petri-Oberschule in Leipzig, wo ich im Mai 1956 die Reifeprüfung ablegte. - Zunächst bewarb ich mich für ein Studium der Elektrotechnik nach Ilmenau und leistete dazu 1 Semester Vorpraktikum im Herbst und Winter 1956 ab. Nach 3 Vorlesungssemestern in Ilmenau wechselte ich zum Physikstudium nach Leipzig über und wurde für das 3. Semester Physik an der Karl-Marx Universität immatrikuliert. Nachdem ich hier das 8. Semester absolviert hatte, zwangen mich die Absperrmaßnahmen des 13.8.1961 mein Studium in München fortzusetzen. Ich wurde im W.S. 61/62 an der Universität München immatrikuliert und das 1960 in Leipzig abgelegte Vordiplom wurde anerkannt. Im Institut für theoretische Physik legte ich im W.S. 64/65 die Diplomprüfung mit einer Arbeit "Zweidimensionale Plasmakonfigurationen ohne inneres Feld im statischen Gleichgewicht" bei Professor Dr. A. Schlüter ab. Seit Juni 1965 bin ich als Doktorand bei Privatdozent Dr. D. Pfirsch Stipendiat am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik.

Gottfried Stuntz